2023학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 22.12.5(월)

[공통: 수학 I ·수학 II]

01. ⑤	02. ④	03. ①	04. ③	05. ⑤
06. ②	07. ④	08. ④	09. ③	10. ④
11. ①	12. ②	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. 10	17. 15	18. 22	19. 7	
20. 17	21. 33	22. 13		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=\left(2^2\div 2^{\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$

$$=\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$

$$=2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$=2^2$$

$$=4$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0}$$

$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하자.

$a_2+a_4=30$ ······ ㉠

한편, $a_4+a_6=\frac{15}{2}$

에서

$r^2(a_2+a_4)=\frac{15}{2}$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$r^2\times 30=\frac{15}{2}$

$r^2=\frac{1}{4}$

$r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

㉠에서

$a_1r+a_1r^3=30$

$a_1\times\frac{1}{2}+a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=30$

$a_1\times\frac{5}{8}=30$

따라서

$a_1=30\times\frac{8}{5}=48$

정답 ①

4. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=x^2f(x)$에서 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

이때, $f(2)=1$, $f'(2)=3$이므로

$$\begin{aligned} g'(2)&=4f(2)+4f'(2)\\ &=4\times1+4\times3\\ &=16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. **출제의도** : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta&=1-\sin^2\theta\\ &=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\\ &=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$f'(1)=6-18+a=0$

$a=12$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-18x+12\\ &=6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로

$b=2$

따라서 $a+b=12+2=14$

정답 ②

7. **출제의도** : 등차수열의 일반항과 $\sum$의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$$\begin{aligned} a_n&=a+(n-1)\times a\\ &=an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

에서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+\cdots$$

$$\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$

$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}}=2$$

이때,

$2\sqrt{a}=3$

$a=\frac{9}{4}$

따라서,

$a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

정답 ④

8. **출제의도** : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=x^3-x+2$에서

$y'=3x^2-1$

이때 곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(t,\ t^3-t+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(0-t)$

정리하면 $t^3=-1$이므로

$t=-1$

따라서 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$y=2x+4$

그러므로 직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2이다.

정답 ④

9. **출제의도** : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$

이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$

$a+3=7$

$a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서

$\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로

$2b=\frac{\pi}{6}$

$b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A=B$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

따라서,

$2k=\frac{28}{3}$

$k=\frac{14}{3}$

정답 ④

11. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$

$$=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$

$$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$

$$=49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$

$$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$$

이때 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$

$$=70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=10$$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{10}$

한편,

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$$

이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$$

$$5\sqrt{2}=2R$$

즉, $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

정답 ①

12. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1 \le x \le n$일 때,

$f(x)=6(x-n+1)(x-n)$

또는

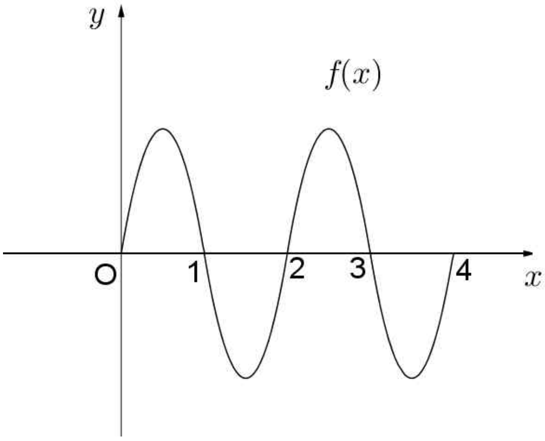
$f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2)=\int_0^2 f(t)dt-\int_2^4 f(t)dt=0$$

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2-6x)dx$$

$$=\left[2x^3-3x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{2}$$

정답 ②

13. **출제의도** : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식

$x^n = m^{12}$ ----㉠

의 근이다.

이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=2$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 2^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(2)=5$

(ⅱ) $m=3$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 3^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(3)=5$

(ⅲ) $m=4$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 4^{12}$

즉,

$x^n = 2^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(4)=7$

(ⅳ) $m=5$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 5^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(5)=5$

(ⅴ) $m=6$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 6^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(6)=5$

(ⅵ) $m=7$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 7^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(7)=5$

(ⅶ) $m=8$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 8^{12}$

즉,

$x^n = 2^{36}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

이므로

$f(8)=8$

(ⅷ) $m=9$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=9^{12}$

즉,

$x^n=3^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(9)=7$

따라서,

$\sum_{m=2}^{9} f(m)$

$=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=5+5+7+5+5+5+8+7$

$=5\times5+7\times2+8$

$=47$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x>1$에서 $g(x)=x$이므로

$$h(1)=\lim_{t\to0+}g(1+t)\times\lim_{t\to2+}g(1+t)$$

$$=\lim_{t\to0+}(1+t)\times\lim_{t\to2+}(1+t)$$

$$=1\times3$$

$$=3 \text{ (참)}$$

ㄴ.

$$h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$$

이므로

$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$

$-3<x<-1$일 때

$h(x)=x\times f(x+2)$

$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$

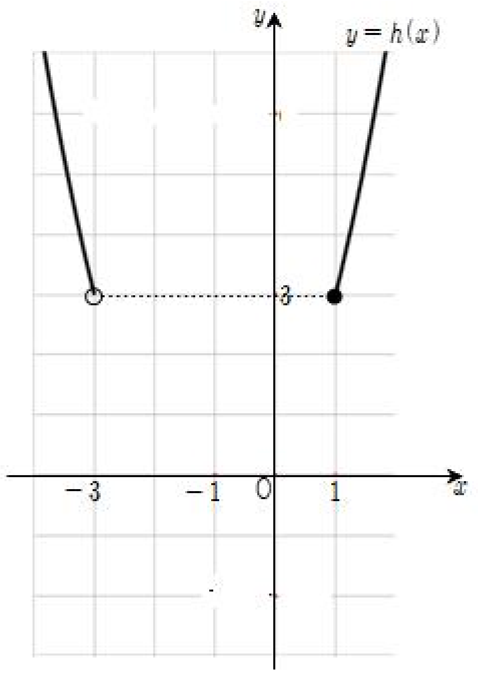
$-1<x<1$일 때

$h(x)=f(x)\times(x+2)$

$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$

$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

즉, $x<-3$ 또는 $x\geq1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

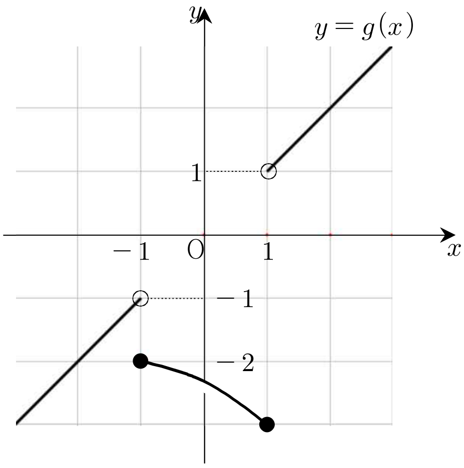


$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$

$h(-1)=f(-1)\times 1=-2\times 1=-2$

이다.

$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$

또 $-1<x<1$에서

$h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로

$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$

$f'(x)<0$, $x+2>0$, $f(x)<0$이므로

$h'(x)<0$

즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $h(1)=3$이므로

함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x)=2$라 하자.

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times 2=2x$

$x=-1$일 때, $h(x)=2\times 1=2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$

이때,

$\lim_{x\to -1-} h(x)=\lim_{x\to -1-} 2x=-2$

$\lim_{x\to -1+} h(x)=\lim_{x\to -1-} 2(x+2)=2$

$h(-1)=2$

이므로

$\lim_{x\to -1-} h(x)\neq\lim_{x\to -1+} h(x)$

이다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x)=-x-3$이라 하자.

$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$

$-3<x<-1$일 때,

$h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$

$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times 1=-2$

$-1<x<1$일 때,

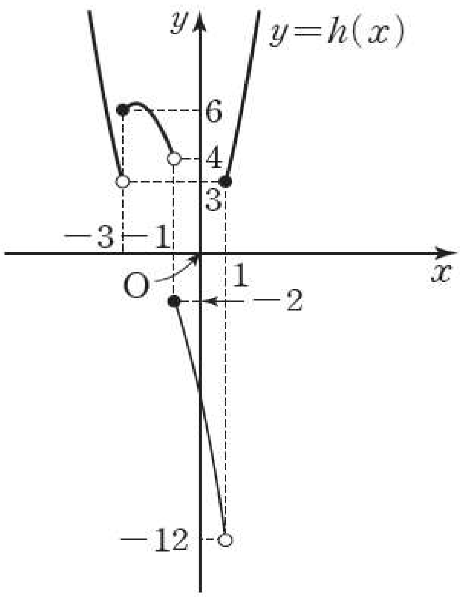
$h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$

$x=1$일 때, $h(x)=1\times 3=3$

$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

이때, $\lim_{x\to 1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로

함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로

$\frac{a_6}{3}=a_7$

$a_6=3a_7=3\times40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ⅱ) $a_6=3k-2$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6$
$\quad=40-(3k-2)$
$\quad=42-3k$
$\quad=3(14-k)$

a_5는 자연수이므로

$3(14-k)>0$에서

$k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로

$a_6=\frac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서

$4k=16$

$k=4$

따라서

$a_6=3\times4-2=10$

이므로

$a_8=a_6+a_7$
$\quad=10+40$
$\quad=50$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8$
$\quad=40+50$
$\quad=90$

(ⅲ) $a_6=3k-1$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6$
$\quad=40-(3k-1)$
$\quad=41-3k$

a_5는 자연수이므로

$41-3k>0$에서

$k<\frac{41}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$a_4=a_6-a_5$
$\quad=(3k-1)-(41-3k)$
$\quad=6k-42$
$\quad=3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로

$3(2k-14)>0$에서

$k>7$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로

$a_5=\frac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서

$a_6=3\times11-1=32$

이므로

$a_8 = a_6 + a_7$
$= 32 + 40$
$= 72$

$a_8 = 72$가 3의 배수이므로

$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값은 $M = 200$이고 최솟값은 $m = 24$이다.

따라서

$M + m = 200 + 24 = 224$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$

에서

$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$

$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$

이므로

$3x + 2 = 4(x-2)$

$3x + 2 = 4x - 8$

$x = 10$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int (4x^3 - 2x)\,dx$

$= x^4 - x^2 + C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0) = 3$이므로 $C = 3$

따라서

$f(x) = x^4 - x^2 + 3$이므로

$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k + 5) = 55$에서

$3\sum_{k=1}^{5} a_k + 25 = 55$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = 32$에서

$\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = 32$

따라서

$\sum_{k=1}^{5} b_k = -\sum_{k=1}^{5} a_k + 32$

$= -10 + 32$

$= 22$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$2x^3-6x^2+k=0$ ----㉠

에서

$f(x)=2x^3-6x^2+k$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

한편,

$f'(x)=6x^2-12x$

$=6x(x-2)$

이므로

$f'(x)=0$

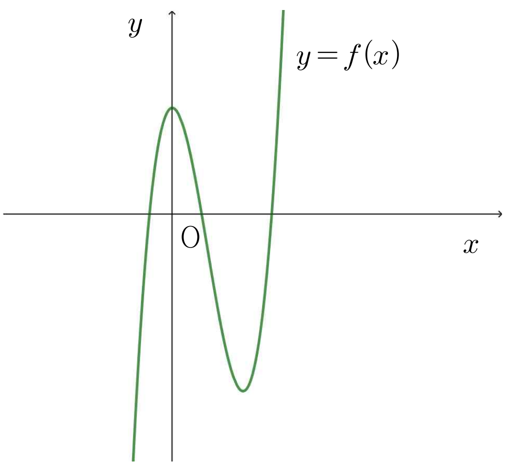
에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$k>0$이고 $k-8<0$

이므로

$0<k<8$

따라서, 정수 k는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. **출제의도** : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$일 때

$v(t)=3t^2+4t+C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2)=0$이므로

$12+8+C=0$에서 $C=-20$

즉, $0 \leq t \leq 3$에서

$$v(t)=\begin{cases} 2t^3-8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2+4t-20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$

$$=\int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^3 |v(t)|\,dt$$

$$=-\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$

$$=-\int_0^2 (2t^3-8t)\,dt+\int_2^3 (3t^2+4t-20)\,dt$$

$$=-\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$

$$=-(-8)+9$$

$$=17$$

정답 17

21. **출제의도** : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

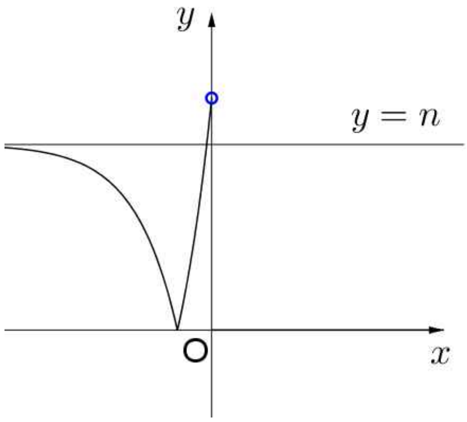
정답풀이 :

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2 만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

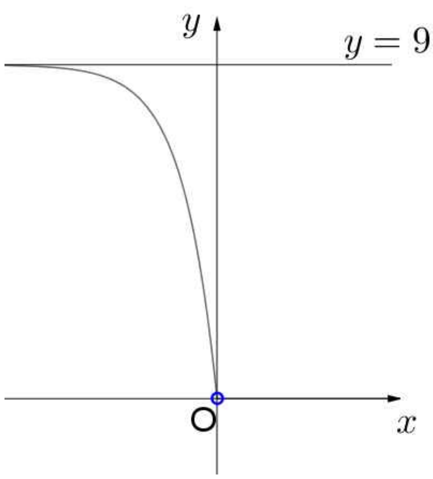
함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

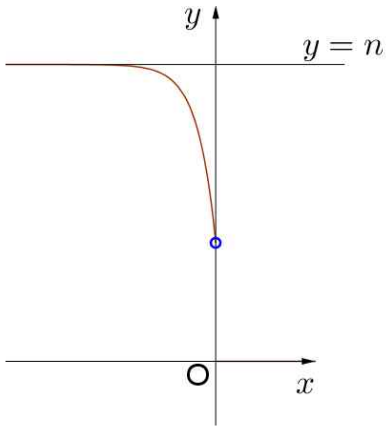
$1 \le n < 9$일 때,



$n=9$일 때,



$n>9$일 때,

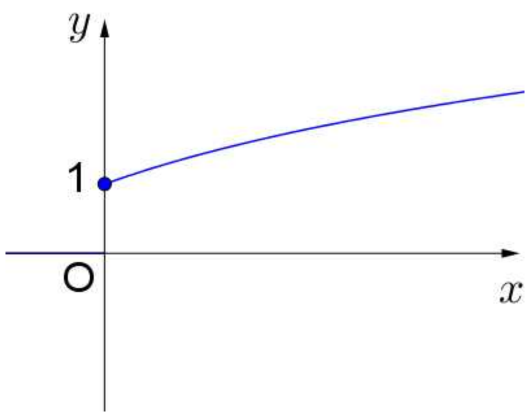


또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

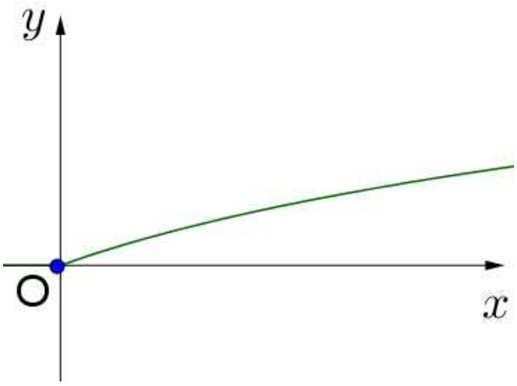
함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x \ge 0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

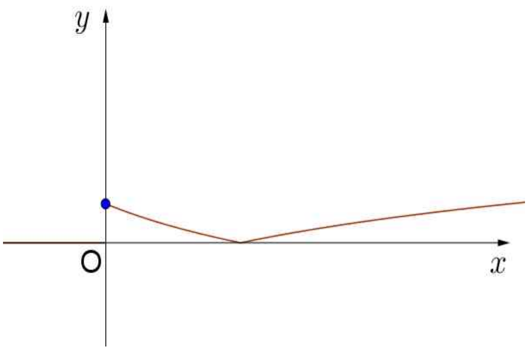
$n=1$일 때,



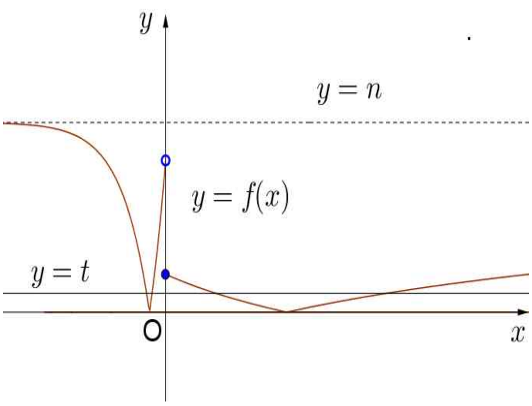
$n=2$일 때,



$n>2$일 때,



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로

$9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.

즉, $2<n<9$이다.

따라서 자연수 n의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$$

이라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로 $x\neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \text{----㉠}$$

이때, 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고

조건(나)에서 $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 두 점

$(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

는 점 $(1, f(1))$을 지난다.

즉,

$$1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$$

EBS

$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$

이 식을 정리하면

$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$

$a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$

$f'(x)=3x^2-12x+b$

한편, ㉠에서

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$\lim_{x\to1}f'(g(x))$

$=\lim_{x\to1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$

$=3k^2-12k+b$ -----㉡

또, 우변은

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=3-12+b$

$=b-9$ -----㉢

㉡과 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=b-9$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

$27-54+3b-3=6$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

정답 13

[다른 풀이 1]

조건(가)와 조건(나)에 의해 두 점 $(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-\left\{f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}$

$=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ----㉠

이다.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(1)=f'(g(1))$

이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$=3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ -----㉡

이고 $g(1)=k\ \left(k \geq \frac{5}{2}\right)$라 하면

$f'(1)=f'(k)$

이므로 ㉡에서

$f'(1)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이고

$f'(k)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)$

에서

$3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이므로

$k=3$

따라서

$f'(1)=f'(3)=\alpha$라 하면

$f'(x)=3(x-1)(x-3)+\alpha$

$\quad\quad =3x^2-12x+9+\alpha$

양변을 x에 대하여 부정적분하면

$f(x)=x^3-6x^2+(9+\alpha)x+C$

(단, C는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(0)=-3$, $f(3)=6$이므로

$C=-3$, $\alpha=3$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

따라서

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

[다른 풀이 2]

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

한편, 조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로

$f(x)-f(1)$
$=(x^3+ax^2+bx-3)-(1+a+b-3)$
$=x^3-1+a(x^2-1)+b(x-1)$
$=(x-1)\{x^2+x+1+a(x+1)+b\}$
$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$

즉,

$f'(g(x))=x^2+(a+1)x+a+b+1$ ----㉠

그리고

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$g(x)=y$라 하면

$3y^2+2ay+b=x^2+(a+1)x+a+b+1$

따라서 y에 대하여 정리하면

$3y^2+2ay-\{x^2+(a+1)x+a+1\}=0$

이고 y에 대하여 풀면

$y=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+3\{x^2+(a+1)x+a+1\}}}{3}$

이고 근호 안을 정리하면

$a^2+3\{x^2+(a+1)x+a+1\}$
$=3\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{3}a^2+a+1\right\}$
$=3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}$

따라서

$g(x)=\dfrac{-a\pm\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

즉,

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\pm k\sqrt{x^2+l}$ (k, l은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수 $g(x)$가 최솟값을 가지므로

$g(x)=\dfrac{-a+\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

이고, $g(x)$는 $x=-\frac{a+1}{2}$에서 최솟값

$\dfrac{-a+\sqrt{\dfrac{(a+3)^2}{4}}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}$을 가진다.

따라서

(i) $a \geq -3$인 경우

$\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{a+3}{2}}{3}=\dfrac{-a+3}{6}=\dfrac{5}{2}$

에서 $a=-12$인데 $a \geq -3$을 만족하지 않는다.

(ii) $a<-3$인 경우

$\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}=\dfrac{-a-\dfrac{a+3}{2}}{3}=\dfrac{-3a-3}{6}=\dfrac{5}{2}$

에서 $a=-6$

(i).(ii)에 의해 $a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$ ----ⓛ

$f'(x)=3x^2-12x+b$ ----ⓒ

한편, ㉠에서 $f'(x)$와 $g(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'(g(1))=f'(1)$

이때, $g(1)=k$라 하면 ⓒ으로부터

$3k^2-12k+b=-9+b$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

이것을 ⓛ에 대입하면

$27-54+3b=9$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

■ [선택: 미적분]
23. ④ 24. ③ 25. ⑤ 26. ④ 27. ②
28. ② 29. 26 30. 31

23. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\ln(x+1)\times\frac{1}{\sqrt{x+4}-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$
$$=1\times(2+2)$$
$$=4$$

정답 ④

24. **출제의도** : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$$
$$=\int_0^1\sqrt{1+3x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{9}(8-1)$$
$$=\frac{14}{9}$$

정답 ③

25. **출제의도** : 등비수열이 포함된 식의 극한값을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$이다.
이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times\frac{r^{n-1}}{4^n}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$$

이고 극한값이 3으로 존재하므로
$r=4$
따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{a}{4}+0}{0+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{a}{2}=3$$

에서 $a=6$ 이므로
$a_2=6\times4=24$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le t \le \frac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t) = (\sqrt{\sec^2 t + \tan t})^2 = \sec^2 t + \tan t$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t + \tan t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{\sec^2 x - \frac{(\cos x)'}{\cos x}\right\}dx$$

$$= [\tan x - \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \tan\frac{\pi}{3} - \ln\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3} - \ln\frac{1}{2} = \sqrt{3} + \ln 2$$

정답 ④

27. **출제의도** : 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OC_1} = 3t$, $\overline{OD_1} = 4t$ $(t>0)$라 하면

$\overline{OP_1} = 5t$ 이므로

$5t = 1$ 에서 $t = \frac{1}{5}$

따라서, $\overline{OC_1} = \frac{3}{5}$에서 $\overline{A_1C_1} = \frac{2}{5}$이고

$\overline{C_1P_1} = \overline{OD_1} = \frac{4}{5}$

이므로

$$\overline{A_1P_1} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_1Q_1} = \overline{P_1Q_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

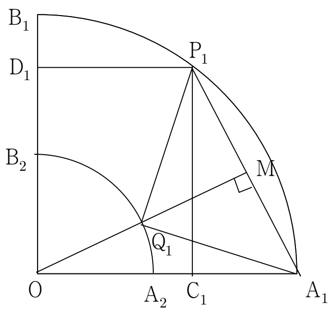
따라서

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

또한, 선분 A_1P_1의 중점을 M이라 하면

$\overline{A_1P_1} \perp \overline{Q_1M}$, $\overline{A_1P_1} \perp \overline{OM}$

이므로 세 점 O, Q_1, M은 한 직선 위에 있다.



이때,

$$\overline{OM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{Q_1M} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{OQ_1} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

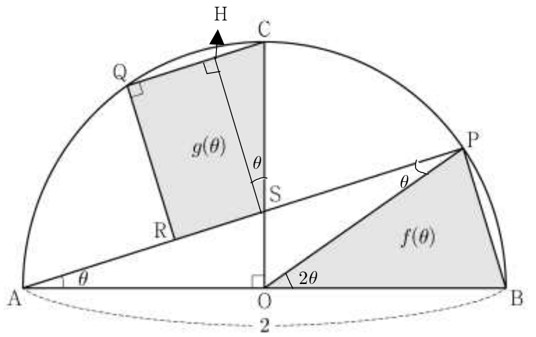
따라서 두 도형(부채꼴) OA_1B_1, OA_2B_2의 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{5}$이다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\theta$이므로

$\angle\mathrm{BOP}=2\theta$

따라서

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

또한, $\overline{\mathrm{OA}}=1$ 에서 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CS}}=1-\tan\theta$

이때, $\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COQ}=2\theta$이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{SCQ}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

또한, $\angle\mathrm{CSR}=\theta+\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\angle\mathrm{QRS}=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{CSH}=\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{SH}}=\overline{\mathrm{RQ}}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CH}}=(1-\tan\theta)\sin\theta$

이고

$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{QH}}&=\overline{\mathrm{CQ}}-\overline{\mathrm{CH}}\\&=2\sin\theta-(\sin\theta-\sin\theta\tan\theta)\\&=\sin\theta+\sin\theta\tan\theta\end{aligned}$$

따라서

$g(\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{RS}})\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(2\sin\theta+\sin\theta+\sin\theta\tan\theta)$

$\times(1-\tan\theta)\cos\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times(3\sin\theta+\sin\theta\tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

이므로

$3f(\theta)-2g(\theta)$

$=\dfrac{3}{2}\sin2\theta-(3\sin\theta+\sin\theta\tan\theta)(1-\tan\theta)\cos\theta$

$=3\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta(3+\tan\theta)(1-\tan\theta)$

$=\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)$

따라서

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(\tan\theta+2)}{\theta^2}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta\times(\tan\theta+2)\right\}$

$=1\times1\times1\times2=2$

정답 ②

29. 출제의도 : 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\left(ae^x+b+\frac{c+6}{e^x}\right)=1$

따라서, $b=1$, $c=-6$이므로

$f(x)=ae^{2x}+e^{x}-6$

조건 (나)에서

$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$

$a=1$

즉, $f(x)=e^{2x}+e^{x}-6$

이때 $f(k)=14$라 하면

$f(k)=e^{2k}+e^{k}-6=14$

에서

$e^{2k}+e^{k}-20=(e^{k}+5)(e^{k}-4)=0$

이므로

$e^{k}=4$

즉, $k=\ln 4$

따라서 $f(\ln 2)=0, f(\ln 4)=14$이므로

$g(0)=\ln 2$, $g(14)=\ln 4$

따라서, $\int_{0}^{14} g(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이고

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(t)}$

이므로

$$\int_{0}^{14} g(x)dx$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$

$$=[tf(t)]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$

$$=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+e^{t}-6)dt$$

$$=14\ln 4-\left[\frac{1}{2}e^{2t}+e^{t}-6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=28\ln 2-(8-6\ln 2)$$

$$=34\ln 2-8$$

따라서 $p=-8$, $q=34$ 이므로

$p+q=26$

정답 26

30. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ ($a>0$, b,c,d는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^{2}+2bx+c$

이므로

$f(3)=27a+9b+3c+d=\frac{1}{2}\cdots$㉠

$f'(3)=27a+6b+c=0\cdots$㉡

조건 (가)에서

$h(0)=g(f(0))=g(d)=e^{\sin \pi d}-1=0$

$e^{\sin \pi d}=1$, $\sin \pi d=0$

이므로 d는 정수이다.

또한,

$g'(x)=e^{\sin \pi x}\times \pi cos \pi x$

$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

이므로

$$\begin{aligned} h'(0)&=g'(f(0))\times f'(0)\\ &=g'(d)\times c\\ &=e^{\sin \pi d}\times \pi cos \pi d\times c\\ &=\pi cos \pi d\times c=0 \end{aligned}$$

그런데, $\cos \pi d\neq 0$ 이므로 $c=0$

따라서, ㉠, ㉡에서

$27a+9b+d=\frac{1}{2}\cdots$㉢, $9a+2b=0\cdots$㉣

이고 $a>0$이므로 $b<0$ 이고

㉢$-3\times$㉣에서

$3b+d=\frac{1}{2}$

따라서 $d>0$이므로 d는 자연수이다.

또한, $f'(0)=c=0$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이 $f(0)=d$, $x=3$에서 극솟값이 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 두 함수 $f(x)$와 $h(x)$가 $x=0$에서 모두 극댓값을 가지므로 두 함수의 도함수의 부호는 $x=0$의 좌우에서 같다.
그러므로 $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$에서
$x=0$의 좌우에서 $g'(f(x))>0$ 이다.
즉 $\cos\pi d>0$ 이어야 한다.
따라서 d는 짝수이다

그리고
$0<x<3$ 에서 $f(3)<f(x)<f(0)$
이므로
$\frac{1}{2}<f(x)<d$

$\frac{\pi}{2}<\pi f(x)<\pi d$
그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간 (0,3)에서 방정식
$h(x)=g(f(x))=e^{\sin\pi f(x)}-1=1$
즉,
$e^{\sin\pi f(x)}=2$, $\sin\pi f(x)=\ln2\,(0<\ln2<1)$
의 서로 다른 실근의 개수가 7이기 위해서는 함수 $y=\sin\pi t$의 주기는 2이므로
$d=8$
㉢, ㉣에서
$a=\frac{5}{9}$, $b=-\frac{5}{2}$
이므로
$f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$
따라서
$f(2)=\frac{40}{9}-10+8=\frac{22}{9}$
즉, $p=9$, $q=22$ 이므로
$p+q=31$

정답 31