

2023학년도 대학수학능력시험  
수학영역 정답 및 풀이

\*최근 수정일 : 22.12.5(월)

[공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ④ 03. ① 04. ③ 05. ⑤  
06. ② 07. ④ 08. ④ 09. ③ 10. ④  
11. ① 12. ② 13. ③ 14. ① 15. ⑤  
16. 10 17. 15 18. 22 19. 7  
20. 17 21. 33 22. 13

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} &= (2^2 \div 2^{\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= (2^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0} \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r(r > 0)$ 이라 하자.

$$a_2 + a_4 = 30 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{한편, } a_4 + a_6 = \frac{15}{2}$$

에서

$$r^2(a_2 + a_4) = \frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2 \times 30 = \frac{15}{2}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$r > 0$ 이므로

$$r = \frac{1}{2}$$

㉠에서

$$a_1 r + a_1 r^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{1}{2} + a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{5}{8} = 30$$

따라서

$$a_1 = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

정답 ①

4. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = x^2 f(x)$ 에서 미분하면

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

이때,  $f(2) = 1$ ,  $f'(2) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(2) &= 4f(2) + 4f'(2) \\ &= 4 \times 1 + 4 \times 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. 출제의도 : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \text{이므로}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan\theta < 0$ ,  $\sin\theta < 0$ 이므로  $\theta$ 는 제4사분면의 각이고,  $\cos\theta > 0$ 이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서  $\cos\theta > 0$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$$

함수  $f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 극대이므로

$$f'(1) = 6 - 18 + a = 0$$

$$a = 12$$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 극소이므로

$$b = 2$$

$$\text{따라서 } a + b = 12 + 2 = 14$$

정답 ②

7. 출제의도 : 등차수열의 일반항과  $\sum$ 의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로  $a_1 = a$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1) \times a \\ &= an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

에서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}) \\ &= \frac{1}{a} \{(\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + \dots \\ & \quad \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a})\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a})$$

$$= \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{a}} = 2$$

이때,

$$2\sqrt{a} = 3$$

$$a = \frac{9}{4}$$

따라서,

$$a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

정답 ④

8. 출제의도 : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = x^3 - x + 2 \text{에서}$$

$$y' = 3x^2 - 1$$

이때 곡선  $y = x^3 - x + 2$  위의 점

$(t, t^3 - t + 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

이 직선이 점  $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(0 - t)$$

정리하면  $t^3 = -1$ 이므로

$$t = -1$$

따라서 점  $(0, 4)$ 에서 곡선  $y = x^3 - x + 2$

에 그은 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

$$y = 2x + 4$$

그러므로 직선  $y = 2x + 4$ 의  $x$ 절편은  $-2$ 이다.

정답 ④

9. 출제의도 : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수  $f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$ 의 그래프의 주

기는  $\frac{\pi}{2}$ 이다.

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[-\frac{\pi}{6}, b]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$$

이다.

한편, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 구간

$[-\frac{\pi}{6}, b]$ 에서  $x$ 의 값이 증가할 때,  $y$ 의 값은 감소한다.

함수  $f(x)$ 는  $x = -\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 7을

가지므로

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = a - \sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7 \text{에서}$$

$$a + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = 7$$

$$a + 3 = 7$$

$$a = 4$$

함수  $f(x)$ 는  $x = b$ 에서 최솟값 3을 가지

므로

$$f(b) = 4 - \sqrt{3} \tan 2b = 3 \text{에서}$$

$$\tan 2b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때,  $-\frac{\pi}{3} < 2b < \frac{\pi}{2}$  이므로

$$2b = \frac{\pi}{6}$$

$$b = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A = B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx = 0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 + 2x^2 - k) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2$$

$$= 4 + \frac{16}{3} - 2k$$

$$= \frac{28}{3} - 2k = 0$$

따라서,

$$2k = \frac{28}{3}$$

$$k = \frac{14}{3}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 25 + 45 - 2 \times 5 \times 3 \sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 70 - 30 \sqrt{5} \cos \theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 49 + 45 - 2 \times 7 \times 3 \sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 94 - 42 \sqrt{5} \cos \theta$$

이때  $\angle BAC = \angle CAD$ 이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

$$70 - 30 \sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42 \sqrt{5} \cos \theta \text{에서}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30 \sqrt{5} \cos \theta$$

$$= 70 - 30 \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= 10$$

$$\text{즉, } \overline{BC} = \sqrt{10}$$

한편,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{이므로 } \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를  $R$ 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$$

$$\frac{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}}{\frac{5}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

$$\text{즉, } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

정답 ①

12. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속  
이므로

$n-1 \leq x \leq n$ 일 때,

$$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$$

또는

$$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$$

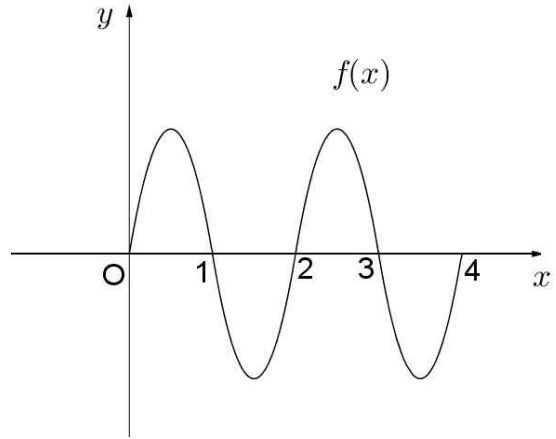
함수  $g(x)$ 가  $x=2$ 에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수  $g(x)$ 가  $x=2$ 에서 최솟값을

가져야 하므로 닫힌구간  $[0, 4]$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ & \quad + \int_3^4 f(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ & \quad - \int_0^1 f(x)dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2 - 6x)dx \\ &= [2x^3 - 3x^2]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

이므로

$$f(4) = 7$$

13. 출제의도 : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

(iv)  $m = 5$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 5^{12}$$

정답풀이 :

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

$m^{12}$ 의  $n$ 제곱근은  $x$ 에 대한 방정식

2, 3, 4, 6, 12

$$x^n = m^{12} \quad \text{----} \ominus$$

이므로

의 근이다.

$$f(5) = 5$$

이때,  $m$ 의 값에 따라 ⊖의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수  $n$ 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(v)  $m = 6$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 6^{12}$$

(i)  $m = 2$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 2^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

이므로

$$f(6) = 5$$

2, 3, 4, 6, 12

이므로

(vi)  $m = 7$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 7^{12}$$

$$f(2) = 5$$

(ii)  $m = 3$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 3^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

이므로

$$f(7) = 5$$

2, 3, 4, 6, 12

이므로

(vii)  $m = 8$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 8^{12}$$

(iii)  $m = 4$ 일 때,

⊖의 방정식은

$$x^n = 4^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{36}$$

즉,

$$x^n = 2^{24}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한  $n$ 의 값은

이므로

$f(8) = 8$   
 (viii)  $m = 9$ 일 때,  
 ㉠의 방정식은  
 $x^n = 9^{12}$   
 즉,  
 $x^n = 3^{24}$   
 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기  
 위한  $n$ 의 값은  
 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24  
 이므로  
 $f(9) = 7$

따라서,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=2}^9 f(m) \\
 &= f(2) + f(3) + \dots + f(9) \\
 &= 5 + 5 + 7 + 5 + 5 + 5 + 8 + 7 \\
 &= 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x > 1$ 에서  $g(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 h(1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2^+} g(1+t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2^+} (1+t) \\
 &= 1 \times 3 \\
 &= 3 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

ㄴ.

$$h(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2^+} g(x+t)$$

이므로

$$x < -3 \text{ 일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

$$x = -3 \text{ 일 때 } h(-3) = -3 \times f(-1)$$

$$-3 < x < -1 \text{ 일 때}$$

$$h(x) = x \times f(x+2)$$

$$x = -1 \text{ 일 때 } h(-1) = f(-1) \times 1$$

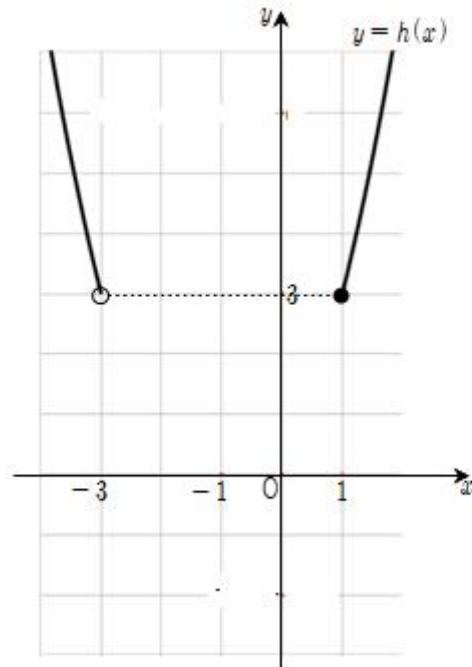
$$-1 < x < 1 \text{ 일 때}$$

$$h(x) = f(x) \times (x+2)$$

$$x = 1 \text{ 일 때 } h(1) = 1 \times 3$$

$$x > 1 \text{ 일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

즉,  $x < -3$  또는  $x \geq 1$ 일 때, 함수  $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

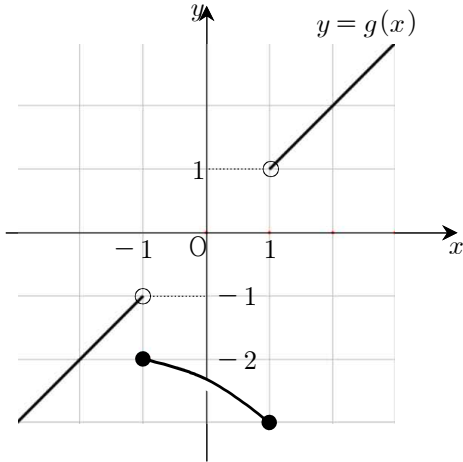


$f(-3) \neq 3$ 이면 함수  $h(x)$ 는  $x = -3$ 에서 불연속이다.

즉, 함수  $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수  $g(x)$ 가 닫힌구간  $[-1, 1]$ 에서 감소하고  $g(-1) = -2$ 일 때, 함수  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$$h(-3) = -3 \times f(-1) = -3 \times (-2) = 6$$

$$h(-1) = f(-1) \times 1 = -2 \times 1 = -2$$

이다.

$$-3 < x < -1 \text{에서 } h(x) > 0$$

$$\text{또 } -1 < x < 1 \text{에서}$$

$$h(x) = f(x) \times (x+2) \text{이므로}$$

$$h'(x) = f'(x) \times (x+2) + f(x)$$

$$f'(x) < 0, x+2 > 0, f(x) < 0 \text{이므로}$$

$$h'(x) < 0$$

즉,  $-1 < x < 1$ 에서 함수  $h(x)$ 는 감소하고,  $h(1) = 3$ 이므로

함수  $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$$f(x) = 2 \text{라 하자.}$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때, } h(x) = x \times 2 = 2x$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(x) = 2 \times 1 = 2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때, } h(x) = 2(x+2)$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2(x+2) = 2$$

$$h(-1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$$

이다.

즉, 함수  $h(x)$ 는  $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$$f(x) = -x - 3 \text{이라 하자.}$$

$$x < -3 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때, } h(x) = -3 \times (-2) = 6$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때,}$$

$$h(x) = x \times \{-(x+2) - 3\} = -x(x+5)$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(-1) = -2 \times 1 = -2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때,}$$

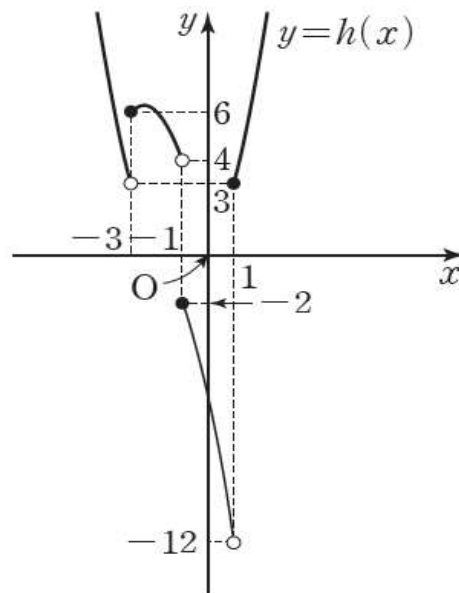
$$h(x) = (-x-3) \times (x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때, } h(x) = 1 \times 3 = 3$$

$$x > 1 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -12, h(1) = 3 \text{이므로}$$

함수  $h(x)$ 의 최솟값은 없다. (거짓)





15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의  $a_9$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i)  $a_6$ 이 3의 배수인 경우

$$a_7 = 40 \text{이므로}$$

$$\frac{a_6}{3} = a_7$$

$$a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$a_7 = 40$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$a_8 = 160$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii)  $a_6 = 3k - 2$  ( $k$ 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_7 - a_6 \\ &= 40 - (3k - 2) \\ &= 42 - 3k \\ &= 3(14 - k) \end{aligned}$$

$a_5$ 는 자연수이므로

$$3(14 - k) > 0 \text{에서}$$

$$k < 14$$

한편,  $a_5$ 는 3의 배수이므로

$$a_6 = \frac{a_5}{3}$$

$$\text{즉, } 3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3} \text{에서}$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 10 + 40 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$a_8 = 50$ 이 3의 배수가 아니므로

$$\begin{aligned} a_9 &= a_7 + a_8 \\ &= 40 + 50 \\ &= 90 \end{aligned}$$

(iii)  $a_6 = 3k - 1$  ( $k$ 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_7 - a_6 \\ &= 40 - (3k - 1) \\ &= 41 - 3k \end{aligned}$$

$a_5$ 는 자연수이므로

$$41 - 3k > 0 \text{에서}$$

$$k < \frac{41}{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

한편,  $a_5$ 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_6 - a_5 \\ &= (3k - 1) - (41 - 3k) \\ &= 6k - 42 \\ &= 3(2k - 14) \end{aligned}$$

$a_4$ 가 자연수이므로

$$3(2k - 14) > 0 \text{에서}$$

$$k > 7 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편,  $a_4$ 는 3의 배수이므로

$$a_5 = \frac{a_4}{3}$$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서}$$

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 32 + 40 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서  $a_9$ 의 최댓값은  $M=200$ 이고 최솟값은  $m=24$ 이다.  
따라서  
 $M+m = 200 + 24 = 224$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$$

에서

$$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$$

$$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$$

이므로

$$3x+2 = 4(x-2)$$

$$3x+2 = 4x-8$$

$$x = 10$$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (4x^3 - 2x) dx$$

$$= x^4 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때  $f(0) = 3$ 이므로  $C = 3$

따라서

$$f(x) = x^4 - x^2 + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 b_k = - \sum_{k=1}^5 a_k + 32$$

$$= -10 + 32$$

$$= 22$$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수  $k$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$$2x^3 - 6x^2 + k = 0 \quad \text{----}\textcircled{7}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + k$$

라 하면 방정식의 실근은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점의  $x$ 좌표이다.

한편,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x \\ &= 6x(x-2) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) = 0$$

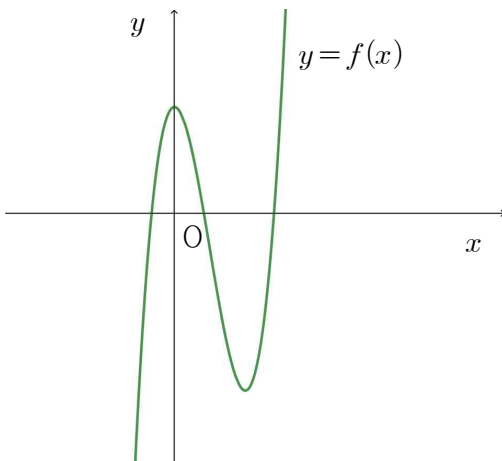
에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

그러므로 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$k$	↘	$k-8$	↗

이때,  $\textcircled{7}$ 이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수  $f(x)$ 의 극댓값은 양수이어야 하고 함수  $f(x)$ 의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$$k > 0 \text{ 이고 } k - 8 < 0$$

이므로

$$0 < k < 8$$

따라서, 정수  $k$ 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. 출제의도 : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$ 일 때

$$v(t) = 3t^2 + 4t + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때  $v(2)=0$ 이므로

$$12 + 8 + C = 0 \text{에서 } C = -20$$

즉,  $0 \leq t \leq 3$ 에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서  $t=0$ 에서  $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 |v(t)| dt \\ &= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt \\ &= -\int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= -\int_0^2 (2t^3 - 8t) dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20) dt \\ &= -\left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2\right]_0^2 + [t^3 + 2t^2 - 20t]_2^3 \\ &= -(-8) + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$

정답 17

21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

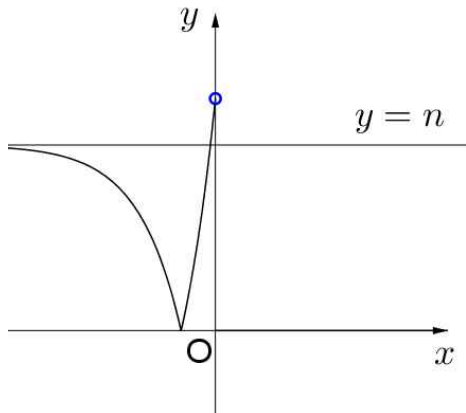
정답풀이 :

함수  $y = 3^{x+2} - n$ 의 그래프는 함수  $y = 3^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

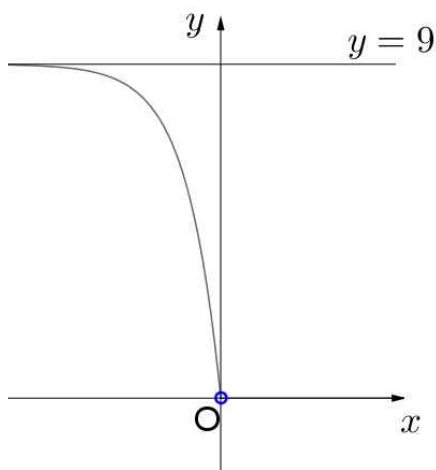
함수  $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 점  $(0, |9-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은  $y = n$ 이다.

$x < 0$ 일 때, 자연수  $n$ 의 값에 따른 함수  $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

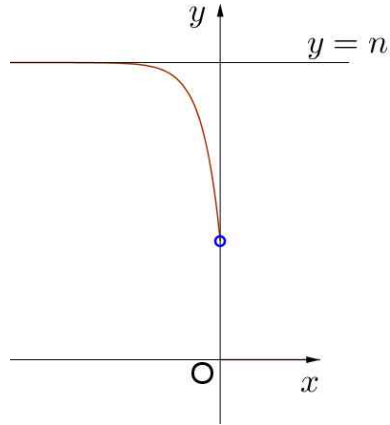
$1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,

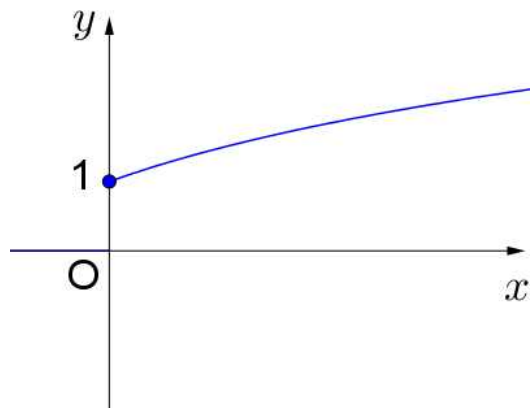


또, 함수  $y = \log_2(x+4) - n$ 의 그래프는 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-4$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

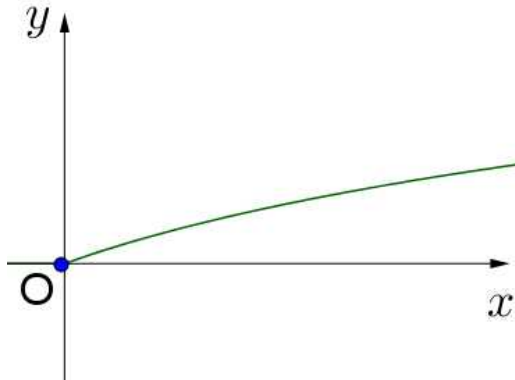
함수  $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 점  $(0, |2-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은  $x = -4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수  $n$ 의 값에 따른 함수  $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

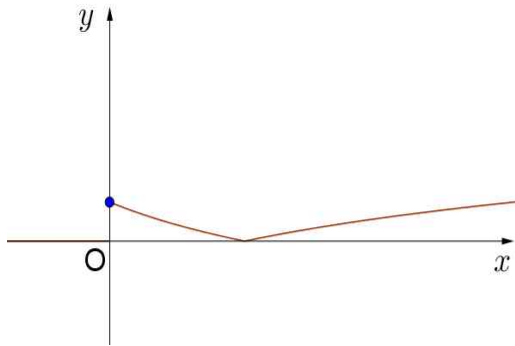
$n = 1$ 일 때,



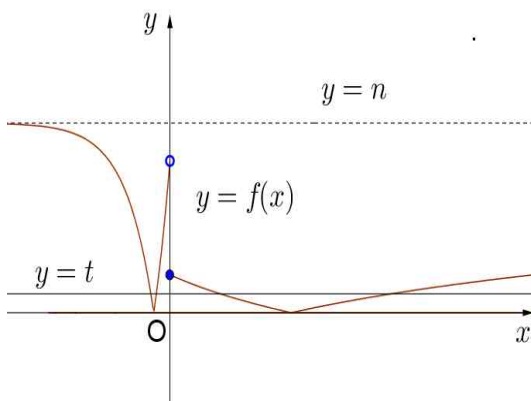
$n = 2$ 일 때,



$n > 2$ 일 때,



$x$ 에 대한 방정식  $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수  $g(t)$ 는 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수  $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로  $9 - n > 0$ 이고  $2 - n < 0$ 이어야 한다. 즉,  $2 < n < 9$ 이다.

따라서 자연수  $n$ 의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수  $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고  $f(0) = -3$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로  $x \neq 1$ 일 때,

$$f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{----} \textcircled{7}$$

이때, 두 점  $(1, f(1))$ ,  $(x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가  $f'(g(x))$ 이고

조건(나)에서  $g(x) \geq \frac{5}{2}$ 이므로 두 점

$(1, f(1))$ ,  $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 를 지나는 직선은

점  $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

는 점  $(1, f(1))$ 을 지난다,

즉,

$$1 + a + b - 3 - \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)^3 + a\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b\left(\frac{5}{2}\right) - 3 \right\}$$

$$= \left\{ 3 \times \left( \frac{5}{2} \right)^2 + 5a + b \right\} \left( 1 - \frac{5}{2} \right)$$

이 식을 정리하면

$$-\frac{117}{8} - \frac{21}{4}a - \frac{3}{2}b = \left( \frac{75}{4} + 5a + b \right) \left( -\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{9}{4}a = -\frac{108}{8}$$

$$a = -6$$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b$$

한편, ㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

이때,  $g(x)$ 는 연속함수이므로  $g(1) = k$ 라 하면 좌변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{ 3\{g(x)\}^2 - 12g(x) + b \}$$

$$= 3k^2 - 12k + b \quad \text{-----㉡}$$

또, 우변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= f'(1)$$

$$= 3 - 12 + b$$

$$= b - 9 \quad \text{-----㉢}$$

㉡과 ㉢으로부터

$$3k^2 - 12k + b = b - 9$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

즉,

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때,  $g(1) = 1$ 은  $g(x)$ 가 최솟값  $\frac{5}{2}$ 를 갖

는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서  $f(g(1)) = 6$ 이므로

$$f(3) = 6$$

$$27 - 54 + 3b - 3 = 6$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

정답 13

[다른 풀이 1]

조건(가)와 조건(나)에 의해 두 점

$(1, f(1)), \left( \frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) \right)$ 를 지나는 직선은

점  $\left( \frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) \right)$ 에서 접하는 직선이다.

따라서 삼차함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - \left\{ f'\left(\frac{5}{2}\right) \left( x - \frac{5}{2} \right) + f\left(\frac{5}{2}\right) \right\}$$

$$= (x-1) \left( x - \frac{5}{2} \right)^2 \quad \text{-----㉣}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x))$$

이고 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f'(1) = f'(g(1))$$

이다.

㉣의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = \left( x - \frac{5}{2} \right)^2 + 2(x-1) \left( x - \frac{5}{2} \right)$$

$$= 3 \left( x - \frac{3}{2} \right) \left( x - \frac{5}{2} \right) \quad \text{-----㉤}$$

이고  $g(1) = k$  ( $k \geq \frac{5}{2}$ )라 하면

$$f'(1) = f'(k)$$

이므로 ㉠에서

$$f'(1) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이고

$$f'(k) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3\left(k - \frac{3}{2}\right)\left(k - \frac{5}{2}\right)$$

에서

$$3\left(k - \frac{3}{2}\right)\left(k - \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이므로

$$k = 3$$

따라서

$$f'(1) = f'(3) = \alpha \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3) + \alpha$$

$$= 3x^2 - 12x + 9 + \alpha$$

양변을  $x$ 에 대하여 부정적분하면

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + (9 + \alpha)x + C$$

(단,  $C$ 는 적분상수)

조건 (다)에서  $f(0) = -3$ ,  $f(3) = 6$ 이므로

$$C = -3, \alpha = 3$$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

따라서

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

### [다른 풀이 2]

조건 (다)에서  $f(0) = -3$ 이므로 두 상수  $a, b$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

한편, 조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로

$$f(x) - f(1) = (x^3 + ax^2 + bx - 3) - (1 + a + b - 3)$$

$$= x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

$$= (x-1)\{x^2 + x + 1 + a(x+1) + b\}$$

$$= (x-1)\{x^2 + (a+1)x + a + b + 1\}$$

즉,

$$f'(g(x)) = x^2 + (a+1)x + a + b + 1 \text{ ---- ㉡}$$

그리고

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이고}$$

$g(x) = y$ 라 하면

$$3y^2 + 2ay + b = x^2 + (a+1)x + a + b + 1$$

따라서  $y$ 에 대하여 정리하면

$$3y^2 + 2ay - \{x^2 + (a+1)x + a + 1\} = 0$$

이고  $y$ 에 대하여 풀면

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3\{x^2 + (a+1)x + a + 1\}}}{3}$$

이고 근호 안을 정리하면

$$a^2 + 3\{x^2 + (a+1)x + a + 1\}$$

$$= 3\left\{x^2 + (a+1)x + \frac{1}{3}a^2 + a + 1\right\}$$

$$= 3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}$$

따라서

$$g(x) = \frac{-a \pm \sqrt{3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$$

즉,

$y = g(x)$ 의 그래프는  $y = \pm k\sqrt{x^2 + l}$  ( $k, l$ 은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수  $g(x)$ 가 최솟값을 가지므로

$$g(x) = \frac{-a + \sqrt{3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$$

이고,  $g(x)$ 는  $x = -\frac{a+1}{2}$ 에서 최솟값

$$\frac{-a + \sqrt{\frac{(a+3)^2}{4}}}{3} = \frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} \text{ 을 가진}$$

다.

따라서

(i)  $a \geq -3$ 인 경우

$$\frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} = \frac{-a + \frac{a+3}{2}}{3} = \frac{-a+3}{6} = \frac{5}{2}$$

에서  $a = -12$ 인데  $a \geq -3$ 을 만족하지 않는다.

(ii)  $a < -3$ 인 경우

$$\frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} = \frac{-a - \frac{a+3}{2}}{3} = \frac{-3a-3}{6} = \frac{5}{2}$$

에서  $a = -6$

(i).(ii)에 의해  $a = -6$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3 \quad \text{----}\textcircled{\ominus}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b \quad \text{----}\textcircled{\omin�}$$

한편,  $\textcircled{\omin�}$ 에서  $f'(x)$ 와  $g(x)$ 가 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(g(1)) = f'(1)$$

이때,  $g(1) = k$ 라 하면  $\textcircled{\omin�}$ 으로부터

$$3k^2 - 12k + b = -9 + b$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

즉,

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때,  $g(1) = 1$ 은  $g(x)$ 가 최솟값  $\frac{5}{2}$ 를 갖

는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서  $f(g(1)) = 6$ 이므로

$$f(3) = 6$$

이것을  $\textcircled{\omin�}$ 에 대입하면

$$27 - 54 + 3b = 9$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$



■ [선택: 확률과 통계]

23. ③ 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ②  
28. ④ 29. 49 30. 100

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항식  $(x^3 + 3)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (x^3)^{5-r} 3^r = {}_5C_r 3^r x^{15-3r}$$

$$(r=0, 1, 2, \dots, 5)$$

이므로  $x^9$ 항은

$$15 - 3r = 9,$$

즉

$$r = 2$$

일 때이다.

따라서  $x^9$ 의 계수는

$$\begin{aligned} {}_5C_2 \times 3^2 &= 10 \times 9 \\ &= 90 \end{aligned}$$

정답 ③

24. 출제의도 : 중복순열과 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 자리의 자연수가 4000 이상인 홀수이려면

천의 자리의 수는 4, 5 중의 하나이고,

일의 자리의 수는 1, 3, 5 중의 하나이며,

십의 자리와 백의 자리의 수는 각각 1, 2, 3, 4, 5 중의 하나이어야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$\begin{aligned} {}_2\Pi_1 \times {}_3\Pi_1 \times {}_5\Pi_2 &= 2 \times 3 \times 25 \\ &= 150 \end{aligned}$$

정답 ②

25. 출제의도 : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

14개의 마스크 중에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크가 모두 검은색일 확률은

$$\begin{aligned} \frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} &= \frac{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1}} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

따라서 여사건의 확률에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned} 1 - \frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} &= 1 - \frac{3}{13} \\ &= \frac{10}{13} \end{aligned}$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) A는 흰 공 1개와 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_2}{{}_6C_3} \\ &= \frac{2 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}} \\ &= \frac{12}{20} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(ii)  $B$ 는 2가 적혀 있는 공이 3개 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} \\ &= \frac{4}{20} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(iii)  $A \cap B$ 는 2가 적혀 있는 흰 공 1개와 2가 적혀 있는 검은 공 2개가 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} \\ &= \frac{1 \times 3}{20} \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량을  $X(\text{mL})$ 라 하면 확률변수  $X$ 는 정규분포  $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

표본의 크기가 16일 때의 표본평균을  $\bar{x}_1$ 이라 하면 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이므로

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 755.9 - 746.1$$

즉,

$$0.98\sigma = 9.8$$

따라서

$$\sigma = 10$$

이다.

표본의 크기가  $n$ 일 때의 표본평균을  $\bar{x}_2$ 라 하면 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{51.6}{\sqrt{n}}$$

이때  $\frac{51.6}{\sqrt{n}} \leq 6$ , 즉

$$\sqrt{n} \geq \frac{51.6}{6} = 8.6$$

이어야 하므로

$$n \geq 8.6^2 = 73.96$$

이다.

따라서 자연수  $n$ 의 최솟값은 74이다.

정답 ②

28. 출제의도 : 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(0 \leq X \leq a) = 1$ 이므로 확률변수  $X$ 의 확률밀도함수의 그래프로부터

$$\frac{1}{2}ac = 1, \text{ 즉 } ac = 2$$

한편,

$$P(0 \leq X \leq a) = P(X \leq b) + P(X \geq b) = 1$$

이고

$$P(X \leq b) - P(X \geq b) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$P(X \leq b) = \frac{5}{8} \text{ 이고 } P(X \geq b) = \frac{3}{8}$$

이다.

따라서 확률변수  $X$ 의 확률밀도함수의 그래프로부터

$$\frac{1}{2} \times b \times c = \frac{5}{8}$$

이다.

한편,

$$P(X \leq b) > \frac{1}{2}$$

이므로

$$0 < \sqrt{5} < b$$

이다.

이때 두 점  $(0,0)$ ,  $(b,c)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{c}{b}x$$

이므로  $P(X \leq \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{c}{b} \times \sqrt{5}\right) &= \frac{5c}{2b} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉,

$$b = 5c$$

이다.

이때  $bc = 5c^2 = \frac{5}{4}$ 이므로

$$c = \frac{1}{2} (\because c > 0)$$

따라서  $b = \frac{5}{2}$ ,  $a = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을  $A$ , 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을  $B$ 라 하면 구하는 확률은  $P(B|A)$ 이다.

(i) 사건  $A$ 가 일어날 확률

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 주사위를 3번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수가 3 또는 1이어야 한다.

이때 독립시행의 확률에 의하여 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

$$\begin{aligned} {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= 1 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8} \dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡의 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) 사건  $A \cap B$ 가 일어날 확률

㉠에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 3 또는 5의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$$\begin{aligned} {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 &= 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

㉡에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 짝수의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$$\begin{aligned} {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

따라서

$$P(A \cap B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$$

(i), (ii)에서 구하는 조건부확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} p+q &= 36+13 \\ &= 49 \end{aligned}$$

정답 49

30. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$f(1) = 1, f(10) = 10$$

이다.

(i)  $f(5) = 1, f(6) = 7$ 인 경우

$f(5) = 1$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍  $(f(2), f(3), f(4))$ 는  $(1, 1, 1)$

의 1개가 존재한다.

$f(6) = 7$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를

만족시키는 순서쌍  $(f(7), f(8), f(9))$ 는  $(7, 8, 9), (7, 8, 10), (7, 9, 9), (7, 9, 10), (7, 10, 10),$

$(8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10),$

$(8, 10, 10),$

$(9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10),$

$(10, 10, 10)$

의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수  $f$ 의 개수는

$$1 \times 14 = 14$$

이다.

(ii)  $f(5) = 2, f(6) = 8$ 인 경우

$f(5) = 2$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를

만족시키는 순서쌍  $(f(2), f(3), f(4))$ 는

$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2)$

의 4 ( $= {}_2H_3 = {}_4C_3$ )개가 존재한다.

$f(6) = 8$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를

만족시키는 순서쌍  $(f(7), f(8), f(9))$ 는

$(8, 8, 9), (8, 8, 10),$

(8,9,9), (8,9,10), (8,10,10),  
 (9,9,9), (9,9,10), (9,10,10), (10,10,10)  
 의 9개가 존재한다.  
 따라서 이 경우의 함수  $f$ 의 개수는  
 $4 \times 9 = 36$   
 이다.

(iii)  $f(5) = 3, f(6) = 9$ 인 경우  
 $f(5) = 3$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를  
 만족시키는 순서쌍  $(f(2), f(3), f(4))$ 는  
 (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3),  
 (1,2,2), (1,2,3), (1,3,3),  
 (2,2,2), (2,2,3), (2,3,3)  
 의 9개가 존재한다.  
 $f(6) = 9$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를  
 만족시키는 순서쌍  $(f(7), f(8), f(9))$ 는  
 (9,9,9), (9,9,10), (9,10,10), (10,10,10)  
 의 4 ( $= {}_2H_3 = {}_4C_3$ )개가 존재한다.  
 따라서 이 경우의 함수  $f$ 의 개수는  
 $9 \times 4 = 36$   
 이다.

(iv)  $f(5) = 4, f(6) = 10$ 인 경우  
 $f(5) = 4$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를  
 만족시키는 순서쌍  $(f(2), f(3), f(4))$ 는  
 (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4),  
 (1,2,2), (1,2,3), (1,2,4),  
 (1,3,3), (1,3,4),  
 (2,2,2), (2,2,3), (2,2,4),  
 (2,3,3), (2,3,4)  
 의 14개가 존재한다.  
 $f(6) = 10$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를  
 만족시키는 순서쌍  $(f(7), f(8), f(9))$ 는  
 (10,10,10)  
 의 1개가 존재한다.  
 따라서 이 경우의 함수  $f$ 의 개수는  
 $14 \times 1 = 14$

이다.  
 (i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 함수  $f$   
 의 개수는  
 $14 + 36 + 36 + 14 = 100$

정답 100

[다른 풀이]  
 조건 (나)에서  
 $f(1) = 1, f(10) = 10$   
 이다.

(i)  $f(5) = 1, f(6) = 7$ 인 경우  
 $f(5) = 1$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를  
 만족시키는 순서쌍  $(f(2), f(3), f(4))$ 는  
 (1,1,1)  
 의 1개가 존재한다.  
 $f(6) = 7$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를  
 만족시키는 순서쌍  $(f(7), f(8), f(9))$ 의 개  
 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f(9) = 9 \text{일 때} \\ {}_3H_2 - 1 = {}_4C_2 - 1 \\ = 6 - 1 \\ = 5 \end{aligned}$$

( $f(7) = f(8) = 7$ 인 경우를 제외함)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} f(9) = 10 \text{일 때} \\ {}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 \\ = 10 - 1 \\ = 9 \end{aligned}$$

( $f(7) = f(8) = 7$ 인 경우를 제외함)  
 따라서 이 경우의 함수  $f$ 의 개수는  
 $5 + 9 = 14$   
 이다.

(ii)  $f(5) = 2, f(6) = 8$ 인 경우  
 $\textcircled{1} f(5) = 2$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)  
 를 만족시키는 순서쌍  $(f(2), f(3), f(4))$ 의

---

개수는

$$\begin{aligned} {}_2H_3 &= {}_4C_3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

②  $f(6)=8$ 일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍  $(f(7), f(8), f(9))$ 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_3 - 1 &= {}_5C_3 - 1 \\ &= 10 - 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

( $f(7)=f(8)=f(9)=8$ 인 경우를 제외함)  
따라서 이 경우의 함수  $f$ 의 개수는  
 $4 \times 9 = 36$   
이다.

(iii) 조건 (나)와 조건 (다)에서 함수  $f$ 의  
 $1 \leq x \leq 5$ 일 때의 규칙성과  
 $6 \leq x \leq 10$ 일 때의 규칙성이 서로 대칭  
적이므로

$f(5)=3, f(6)=9$ 인 함수  $f$ 의 개수는  
(ii)의 함수의 개수와 같고,  
 $f(5)=4, f(6)=10$ 인 함수  $f$ 의 개수는  
(i)의 함수의 개수와 같음을 추론할 수  
있다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수  $f$ 의 개  
수는  
 $2 \times (14 + 36) = 2 \times 50 = 100$   
이다.