2026학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ①	02. ④	03. ⑤	04. ③	05. ③
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ④	10. ③
11. ③	12. ②	13. ⑤	14. ④	15. ④
16. 9	17. 16	18. 12	19. 15	
20. 130	21. 65	22. 457		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$9^{\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{2\times\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=3^0$$
$$=1$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^3+4x+1$에서

$f'(x)=9x^2+4$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=9+4=13$$

정답 ④

3. 출제의도 : 시그마의 정의와 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{4}k$$
$$=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\frac{4\times 5}{2}$$
$$=2\sum_{k=1}^{4}a_k-10$$
$$=0$$

에서 $2\sum_{k=1}^{4}a_k=10$

따라서 $\sum_{k=1}^{4}a_k=5$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x-2)$$
$$=3\times 1-2=1$$
$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-3x+a)$$
$$=1^2-3\times 1+a=-2+a$$

$f(1)=1^2-3\times 1+a=-2+a$

이므로

$1=-2+a$

따라서

$a=3$

정답 ③

5\. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에서

$f'(x)=1\times(2x^2-x-2)+(x+2)\times(4x-1)$

따라서

$f'(1)=(2-1-2)+(1+2)\times(4-1)$

$=-1+9$

$=8$

정답 ③

6\. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 정의에 의하여

$\log_a b=3$에서

$b=a^3$

이때

$\log_3\frac{b}{a}=\log_3\frac{a^3}{a}=\log_3 a^2=2\log_3 a=\frac{1}{2}$

에서

$\log_3 a=\frac{1}{4}$

이므로

$\log_3 b=3\log_3 a=\frac{3}{4}$

따라서 로그의 성질에 의해

$\log_9 ab=\log_{3^2}(a\times a^3)$

$=\frac{4}{2}\log_3 a$

$=2\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}$

정답 ②

7\. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$은 점 $(0,3)$에서 접하고 모든 실수 x에 대하여

$x^2+3\geq-\frac{1}{5}x^2+3$

이므로 구하는 넓이는

$\int_0^2\left\{(x^2+3)-\left(-\frac{1}{5}x^2+3\right)\right\}dx$

$=\int_0^2\frac{6}{5}x^2dx$

$=\left[\frac{2}{5}x^3\right]_0^2$

$=\frac{16}{5}$

정답 ⑤

8\. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0$

이므로

$\cos\theta<0$

이때,

$\sin\theta+3\cos\theta=0$

에서

$\sin\theta=-3\cos\theta>0$

이고,

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=9\cos^2\theta\\&=9(1-\sin^2\theta)\\&=9-9\sin^2\theta\end{aligned}$$

$10\sin^2\theta=9$

$\sin^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

정답 ①

9. **출제의도** : 삼차함수의 그래프와 극값을 이용하여 x축에 평행한 직선과 삼차함수의 그래프가 접할 때의 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+6ax-9a^2\\&=3(x+3a)(x-a)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-3a$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편, $f(0)=4<5$이고,

직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$f(-3a)=5$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(-3a)&=(-3a)^3+3a(-3a)^2-9a^2(-3a)+4\\&=27a^3+4\end{aligned}$$

이므로

$27a^3+4=5$에서

$a^3=\dfrac{1}{27}$

a가 양수이므로

$a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+4$

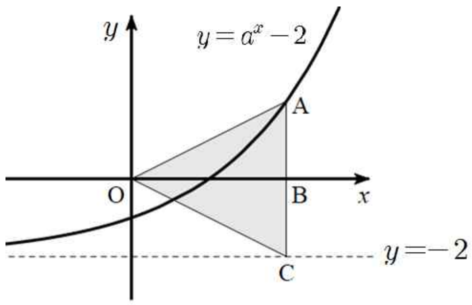
이므로

$$\begin{aligned}f(2)&=2^3+2^2-2+4\\&=14\end{aligned}$$

정답 ④

10. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$a>1$이므로 함수 $y=a^x-2$의 그래프는 위 그림과 같고 이 곡선의 점근선은 직선 $y=-2$이다.

점 A의 좌표를 $(p,\,q)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$

이므로

$q=2$

점 A는 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점이므로

$2=a^p-2$

즉, $a^p=4$에서 $p=\log_a 4$

이때 삼각형 AOC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}=8$

에서

$\overline{\mathrm{OB}}=4$

즉, $\log_a 4=4$이므로

$a^4=4$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서

$$\begin{aligned} a\times\overline{\mathrm{OB}} &= \sqrt{2}\times 4 \\ &= 2^{\frac{1}{2}+2} \\ &= 2^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 위치와 운동 방향, 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $k=0$이면 $v(t)=t^2+4$이므로

$t=1$일 때 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} & 0+\int_0^1 (t^2+4)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}+4-0 \\ &= \frac{13}{3} \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ. $k=3$이면 $v(t)=t^2-3t+4$이므로

$v(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

따라서 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다. (거짓)

ㄷ. $k=5$이면 $v(t)=t^2-5t+4$이므로

$v(t)=(t-1)(t-4)$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지

점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 |v(t)|dt \\ &= \int_0^2 |t^2-5t+4|dt \\ &= \int_0^1 (t^2-5t+4)dt \\ &\quad + \int_1^2 \{-(t^2-5t+4)\}dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1 \\ &\quad - \left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4 \\ &\quad -\left\{\left(\frac{8}{3}-10+8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)\right\} \\ &= 3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

12. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$2(a_1+a_4+a_7)=6$에서

$2(a_1+a_1r^3+a_1r^6)=2a_1(1+r^3+r^6)=6$

$a_1(1+r^3+r^6)=3$ ...... ㉠

$a_4+a_7+a_{10}=6$에서

$a_1r^3+a_1r^6+a_1r^9$

$=a_1r^3(1+r^3+r^6)=6$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=2$

㉠에 $r^3=2$를 대입하면

$a_1(1+2+2^2)=3$

$a_1=\frac{3}{7}$

따라서

$a_{10}=a_1r^9=\frac{3}{7}\times 2^3=\frac{24}{7}$

정답 ②

13. **출제의도** : 곱의 미분법과 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-4$에서 $f'(1)=-2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -6)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=-2(x-1)-6$

즉, $y=-2x-4$

$g(x)=(x^3-2x)f(x)$에서 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$

이므로

$g'(1)=(3-2)f(1)+(1-2)f'(1)$

$\quad=1\times(-6)+(-1)\times(-2)=-4$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 6)$에서의 접선 m의 방정식은

$y=-4(x-1)+6$

즉, $y=-4x+10$

이때 두 직선 $y=-2x-4$, $y=-4x+10$의 교점의 x좌표는

$-2x-4=-4x+10$에서 $x=7$이므로 두 직선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{10-(-4)\}\times 7=49$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{HCG}=\angle\mathrm{BAC}=\theta_1$이라 하자.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\sqrt{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2}$

$\quad=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로

$\sin\theta_1=\frac{4}{5}$

또한

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}=2$

이므로 $\angle\mathrm{CAG}=\theta_2$라 하면 삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_2=\frac{(\overline{\mathrm{AG}})^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-(\overline{\mathrm{CG}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AC}}}$

$\quad=\frac{2^2+5^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times2\times5}=\frac{1}{4}$

따라서 삼각형 AEG에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{GE}}^2=(\overline{\mathrm{AG}})^2+(\overline{\mathrm{AE}})^2-2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos\theta_2$$
$$=2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{1}{4}=6$$
$\therefore\ \overline{\mathrm{GE}}=\sqrt{6}$

삼각형 CGE에서 $\angle\mathrm{ECG}=\theta_3$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta_3=\frac{(\overline{\mathrm{CG}})^2+(\overline{\mathrm{CE}})^2-(\overline{\mathrm{GE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{CG}}\times\overline{\mathrm{CE}}}$$
$$=\frac{(2\sqrt{6})^2+3^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\sqrt{6}\times3}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

따라서

$$\sin\theta_3=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{8}$$

삼각형 CGE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{GE}}}{\sin\theta_3}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}}=\frac{8\sqrt{15}}{5}$$

따라서 삼각형 CHG에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{GH}}=2R\times\sin\theta_1$$
$$=\frac{8\sqrt{15}}{5}\times\frac{4}{5}$$
$$=\frac{32\sqrt{15}}{25}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 함수의 극대, 극소를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=\int_0^x(g(t)-f(t))dt$에서

$h'(x)=g(x)-f(x)$

이므로 함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

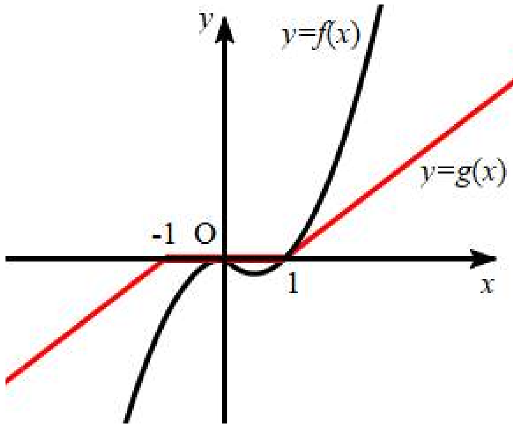
$h'(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$

이면서 $h'(x)=0$인 점의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 점이 오직 한 개만 있어야 한다.

이때 $f'(1)=1$이므로 $a\le1$이면 다음 그림과 같이 $x=0$ 또는 $x=1$에서만

$f(x)=g(x)$

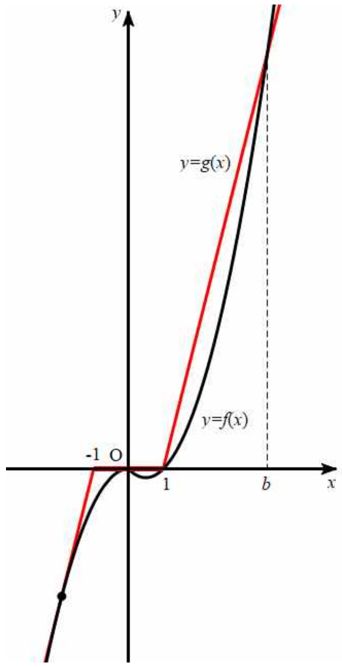
이다.



이때 $x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge f(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $0<x<1$에서 $g(x)>f(x)$, $x>1$에서 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서만 극값을 갖는다.

즉, $a\le1$이면 조건을 만족시킨다.

한편 $a>1$이면 다음 그림과 같이 $x>1$에서 $f(x)=g(x)$인 x의 값이 있다. 이 값을 b라 하자.



이때 $f(b)=g(b)=0$이고 $1<x<b$에서 $g(x)>f(x)$, $x>b$에서 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖는다.

그러므로 조건을 만족시키려면 $x<-1$에서 $f(x)>g(x)$인 구간이 없어야 하므로 a의 값은 위 그림과 같이 $x<-1$에서 곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=ax+a$가 접할 때 최대가 된다.

이 접점의 좌표를 $(t, -t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 $-2t$이므로 접선의 방정식은

$y+t^2=-2t(x-t)$

이다. 이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나야 하므로

$t^2=-2t(-1-t)$

$t(t+2)=0$

$t<-1$이므로 $t=-2$

즉, 조건을 만족시키는 a의 최댓값은

$-2t=4$

이므로

$k=4$

이때, $x\geq 1$에서 $g(x)=4x-4$이므로

$$h(3)=\int_0^3(g(t)-f(t))dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3\{(4t-4)-(t^2-t)\}dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{2}$$

따라서 $k+h(3)=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$

정답 ④

16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=n^2a_n+1$ …… ㉠

을 만족시키므로

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2=1^2\times a_1+1$
$=1\times1+1$
$=2$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3=2^2\times a_2+1$
$=4\times2+1$
$=9$

정답 9

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int (4x^3-2x)dx$$
$$=x^4-x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $F(x)=x^4-x^2+4$이므로

$F(2)=16-4+4=16$

정답 16

18. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=-\dfrac{3}{5}$

이고, $\sin(\angle\mathrm{BAC})>0$ 이므로

$$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{BAC})}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{BAC})$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{4}{5}=12$$

정답 12

19. 출제의도 : 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$이라 하면

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$
$$=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=12$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-15$를 갖는다.

이때 $f(2)=-4$이므로 $-2\le x\le 2$에서

$-15\le f(x)\le 12$

따라서 양수 k의 최솟값은 15이다.

정답 15

20. 출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계 및 $\sum$의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

2이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}$$
$$=\left\{\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)+10\right\}$$
$$-\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\right)$$

$= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \boxed{\frac{1}{3}n}$

이고, 이 식을 정리하면

$2a_n + a_{n+1} = 3 \times \boxed{\frac{1}{3}n}$

즉, $2a_n + a_{n+1} = n$ …… ㉠

이다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \ (n \geq 2)$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \times 2^2 - \frac{1}{6} \times 2 + 10$

즉, $a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{31}{3}$

$a_1 = 7$이므로

$a_2 = 3 \times \left(\frac{31}{3} - 7\right) = \boxed{10}$ …… ㉡

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12})$

$\quad + (a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$

$= a_1 + a_2 + 2(a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$

$\qquad + (a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$

$= a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1} + a_{2k+2})$

$= a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5}(2k+1)$

$= 7 + 10 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11)$

$= 17 + 7 \times 5 = \boxed{52}$

이다.

이때 $f(n) = \frac{1}{3}n$, $p = 10$, $q = 52$이므로

$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130$

정답 130

21. 출제의도 : 극한의 성질과 미분계수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$\lim_{x \to t-} g(x) = \lim_{x \to t+} g(x) = g(t)$

즉,

$\lim_{x \to t-} (-f(x)) = \lim_{x \to t+} f(x) = f(t)$ …… ㉠

이어야 한다.

그런데

$\lim_{x \to t-} (-f(x)) = -f(t)$, $\lim_{x \to t+} f(x) = f(t)$

이므로 ㉠에서

$f(t) = -f(t)$, 즉 $f(t) = 0$

조건 (가)에서 $a=0$ 또는 $a=2$일 때에도

$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재해야 하므로

$g(0) = g(2) = 0$, 즉

$f(0) = f(2) = 0$

그러므로

$f(x) = \alpha x(x-2)(x-k)$ (k는 상수) …… ㉡

로 놓을 수 있다.

한편, 자연수 m에 대하여 조건 (나)에서

$\lim_{x \to m+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0$일 조건은 다음과 같다.

(i) $m = 1$일 때

$\lim_{x \to 1+} x(x-2) = 1 \times (1-2) < 0$이므로

$g(1) > 0$이어야 한다.

이때 $-\frac{7}{2}g(1) < 0$이므로 조건 (나)에

서 $-\frac{7}{2}g(1)$이 자연수라는 조건에 모순이다.
그러므로 1은 조건 (나)를 만족시키는 자연수 m이 될 수 없다.

(ⅱ) $m=2$일 때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이어야 한다.

(ⅲ) $m>2$일 때

$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{g(m)}{m(m-2)}$이고

$m(m-2)>0$이므로

$g(m)<0$

이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$인 자연수 m의 개수가 2이려면

$g(m)<0$이고 $m>2$

인 자연수 m이 적어도 한 개 존재해야 한다.

그러므로 ㉡에서

$f(x)=\alpha x(x-2)(x-k)\ (k>3)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)>0,\ g(1)<0$

이므로

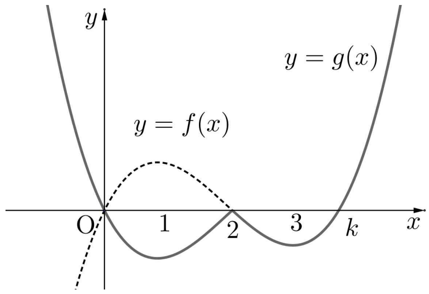
$t=2$

이어야 한다.

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-\alpha x(x-2)(x-k) & (x<2)\\ \alpha x(x-2)(x-k) & (x\ge 2)\end{cases}$$

이다.



이때 2와 3이 조건 (나)를 만족시키므로

$3<k\le 4$이어야 한다.

한편,

$g(-1)=3\alpha(k+1),\ g(1)=-\alpha(k-1)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)=2,\ -\frac{7}{2}g(1)=3$

또는

$g(-1)=3,\ -\frac{7}{2}g(1)=2$

이다.

① $g(-1)=2,\ -\frac{7}{2}g(1)=3$일 때

$3\alpha(k+1)=2$에서 $\alpha=\frac{2}{3(k+1)}$

$-\frac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=3$에서

$\alpha=\frac{6}{7(k-1)}$

$\frac{2}{3(k+1)}=\frac{6}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=9(k+1)$

$7k-7=9k+9$

$k=-8$

이는 $3<k\le 4$에 모순이다.

② $g(-1)=3,\ -\frac{7}{2}g(1)=2$일 때

$3\alpha(k+1)=3$에서 $\alpha=\frac{1}{k+1}$

$-\frac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=2$에서

$\alpha=\frac{4}{7(k-1)}$

$\frac{1}{k+1}=\frac{4}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=4(k+1)$

$7k-7=4k+4$

$k=\frac{11}{3}$

이는 $3<k\leq 4$를 만족시킨다.

$k=\frac{11}{3}$일 때

$\alpha=\frac{1}{k+1}=\frac{3}{14}$

그러므로

$g(-5)=-\frac{3}{14}\times(-5)\times(-7)\times\left(-\frac{26}{3}\right)$

$=65$

정답 65

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\log_{16}(8x+2)$에서

$16^y=8x+2$ …… ㉠

$y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$에서

$4^x=4y+2$ …… ㉡

이므로 ㉠에서 y대신에 $\frac{x}{2}$, x대신에 $\frac{y}{2}$를 대입하면 ㉡과 일치한다. …… (ⅰ)

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$위의 점이므로

$16^b=8a+2$

또한 $\mathrm{B}(c,\ d)$라 하면 점 B는 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$위의 점이므로

$4^c=4d+2$

그리고 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 (b,a)가 직선 OB위에 있어야 하므로

$a=\frac{d}{c}\times b,\ ac-bd=0$ …… ㉢

이때 (ⅰ)에 의하여

$a=\frac{d}{2},\ b=\frac{c}{2}$ 즉 $d=2a.\ c=2b$

…… ㉣

이고 이 관계는 ㉢을 만족시킨다.

따라서 선분 AB의 중점의 좌표가

$\left(\frac{77}{8},\frac{133}{8}\right)$이므로

$\frac{a+c}{2}=\frac{77}{8},\ \frac{b+d}{2}=\frac{133}{8}$

$a+c=\frac{77}{4},\ b+d=\frac{133}{4}$

$a+2b=\frac{77}{4}.\ 2a+b=\frac{133}{4}$

따라서 $a=\frac{63}{4},\ b=\frac{7}{4}$이므로

$a\times b=\frac{441}{16}$

즉 $p=16,\ q=441$이므로

$p+q=457$

정답 457

■ [선택: 확률과 통계]
23. ③ 24. ① 25. ② 26. ⑤ 27. ④
28. ② 29. 977 30. 262

23. **출제의도** : 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

정답 ③

24. **출제의도** : 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}$$
$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{1}{4}$에서
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \mathrm{P}(A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$
$\mathrm{P}(A \cup B) = 1$에서
$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 1$$
즉, $\dfrac{2}{5} + \mathrm{P}(B) - \dfrac{1}{10} = 1$이므로
$$\mathrm{P}(B) = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

정답 ①

25. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
10개의 공 중 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
$${}_{10}\mathrm{C}_2 = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$
이므로 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색일 확률은
$$\frac{2 \times {}_5\mathrm{C}_2}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$
꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은
$$\frac{4}{45}$$
꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 사건과 공에 적힌 수가 서로 같은 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$$\frac{4}{9} + \frac{4}{45} = \frac{8}{15}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 모집단의 표준편차와 표본의 크기를 이용하여 모평균의 신뢰구간을 표본평균으로 나타낼 수 있는가?

정답풀이 :

모집단의 표준편차가 5이므로

모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x}$라 하면

모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}$$

이다.

즉,

$$\overline{x}-2.15\le m\le\overline{x}+2.15$$

한편, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$1.2\le m\le a$$

이므로

$$\overline{x}-2.15=1.2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{x}+2.15=a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$2.15-(-2.15)=a-1.2$$

$$4.3=a-1.2$$

따라서

$$a=4.3+1.2$$

$$=5.5$$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 확률분포의 성질을 이용하여 이산확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 가지는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+a=1$$에서

$$a=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{E}(X)$

$$=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{3}{12}+3\times\frac{5}{12}+4\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{30}{12}=\frac{5}{2},$$

$\mathrm{E}(X^2)$

$$=0^2\times\frac{1}{12}+1^2\times\frac{1}{12}+2^2\times\frac{3}{12}+3^2\times\frac{5}{12}+4^2\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{90}{12}=\frac{15}{2}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$$

$$=\frac{15}{2}-\frac{25}{4}=\frac{5}{4}$$

따라서

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{a}X\right)=\mathrm{V}(6X)=36\mathrm{V}(X)$$

$$=36\times\frac{5}{4}=45$$

정답 ④

28. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 시행은 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 홀수이면 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,

나온 눈의 수가 2이면 1, 2가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,

나온 눈의 수가 4이면 1, 2, 4가 적힌

상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
나온 눈의 수가 6이면 1, 2, 3, 6이 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는 시행이다.
이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수인 사건을 A, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많은 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)$

이다.

사건 A는 다음의 네 가지 경우이다.

(ⅰ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 3번일 때
나온 눈의 수가 2 또는 6인 경우가 1번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{216}{6^4}$$

(ⅱ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 2번일 때
나온 눈의 수가 4인 경우가 1번, 2 또는 6인 경우가 1번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{216}{6^4}$$

(ⅲ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 1번일 때
나온 눈의 수가 4인 경우가 2번, 2 또는 6인 경우가 1번이거나
나온 눈의 수가 2 또는 6인 경우가 3번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^1+\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^3$$
$$=\frac{168}{6^4}$$

(ⅳ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 모두 짝수일 때
나온 눈의 수가 4인 경우가 1번, 2 또는 6인 경우가 3번이거나
나온 눈의 수가 4인 경우가 3번, 2 또는 6인 경우가 1번이어야 하므로
이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^3+\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{40}{6^4}$$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{216}{6^4}+\frac{216}{6^4}+\frac{168}{6^4}+\frac{40}{6^4}$$
$$=\frac{640}{6^4}$$

한편, 사건 $A\cap B$는 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 2번, 4인 경우가 1번, 6인 경우가 1번이거나 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 1번, 6인 경우가 3번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1+\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$=\frac{120}{6^4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{120}{6^4}}{\frac{640}{6^4}}$$
$$=\frac{3}{16}$$

정답 ②

29. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 이항분포를 구한 후 이항분포와 정규분포와의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같을 확률은 $\frac{a}{6}$이고, a보다 클 확률은 $\frac{6-a}{6}$이므로 주어진 시행을 한 번 하여 기록한 수가 3일 확률은

$$\frac{a}{6}\times{}_5C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{6-a}{6}\times{}_3C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$=\frac{a+4}{32}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(19200,\ \frac{a+4}{32}\right)$를 따른다.

$E(X)=19200\times\frac{a+4}{32}=4800$에서

$a=4$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(19200,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때,

$V(X)=19200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=3600$

이고, 19200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(4800,\ 60^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}k&=P(X\le 4800+30a)\\&=P(X\le 4920)\\&=P\left(Z\le\frac{4920-4800}{60}\right)\\&=P(Z\le 2)\\&=0.5+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.477\\&=0.977\end{aligned}$$

따라서

$1000\times k=1000\times 0.977=977$

정답 977

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에 의해
들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.

(ⅰ) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 4개일 때
공이 모두 8개이고, 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하이므로 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니는 2이고, 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니는 4개이다.
조건 (나)에서 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않아야 하므로 먼저 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니 4개를 각각 A_1, A_2, A_3, A_4라 하고, 네 주머니 A_1, A_2, A_3, A_4가 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$$^{\vee}\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ ^{\vee}\ A_4\ ^{\vee}$$

네 주머니 A_1, A_2, A_3, A_4의 사이사이와 맨 앞, 맨 뒤 중 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 2개를 놓을 위치를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 2개를 B_1, B_2라 하고, 주머니 B_1, B_2가 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$B_1\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ \ B_2\ \ A_4\ ^{\vee}$ …… ㉠

들어 있는 공의 개수가 1인 주머니 4개를 나열하는 경우의 수는 ㉠의 $^{\vee}$ 표시된 3곳 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2$

$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

그러므로 이때의 경우의 수는

$10\times15=150$

(ⅱ) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 6개일 때

공이 모두 8개이고, 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하이므로 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니는 1개이고, 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니는 3개이다.

조건 (나)에서 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않아야 하므로 먼저 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니 3개를 A_1, A_2, A_3이라 하고, 세 주머니 A_1, A_2, A_3이 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$^{\vee}\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ ^{\vee}$

세 주머니 A_1, A_2, A_3의 사이 사이와 맨 앞, 맨 뒤 중 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 1개를 놓을 위치를 택하는 경우의 수는

$_4C_1=4$

들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 1개를 B_1이라 하고, 주머니 B_1이 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$B_1\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ ^{\vee}$ …… ㉡

들어 있는 공의 개수가 1인 주머니 6개를 나열하는 경우의 수는 ㉡의 $^{\vee}$ 표시된 3곳 중에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2$

$=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

그러므로 이때의 경우의 수는

$4\times28=112$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$150+112=262$

정답 262

■ [선택: 미적분]
23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ②
28. ⑤ 29. 97 30. 11

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 6x}{6x}\times 3\right)$$
$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{6x}$$
$$=3\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}$$
$$=3\times 1$$
$$=3$$

정답 ③

24. **출제의도** : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin x-\sin^3 x=\sin x(1-\sin^2 x)$$
$$=\sin x\cos^2 x$$

또한

$\sin x=t$라 하면

$\sin 0=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1$이고

$\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\sin x}\times\cos x)dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

정답 ④

25. **출제의도** : 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9n^2-5}+2n<a_n<5n+1$$

을 만족시키므로

$$\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{5n+1}{n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2\right)$$
$$=3+2=5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=5$$

이므로 수열의 극한의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{(5+0)^2}{5+5-0}$$

$$=\frac{5}{2}$$

정답 ③

26. **출제의도** : 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{x+x\ln x}\right)^2 dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 (x+x\ln x)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 x(1+\ln x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 부분적분법에 의하여

$$\int_1^2 x(1+\ln x)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}(1+\ln x)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left\{\frac{4}{2}(1+\ln 2)\right\}-\left\{\frac{1}{2}(1+\ln 1)\right\}-\int_1^2\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{3+4\ln 2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$=\frac{3+4\ln 2}{2}-\frac{4-1}{4}$$

$$=\frac{3+8\ln 2}{4}$$

㉠에서 구하는 입체도형의 부피는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3+8\ln 2}{4}=\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$$

정답 ①

27. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x=e^{4t}(1+\sin^2\pi t)$, $y=e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)$를

$y=3x-5e$에 대입하면

$$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)=3e^{4t}(1+\sin^2\pi t)-5e$$

$$e^{4t}\{-2-3(\cos^2\pi t+\sin^2\pi t)\}=-5e$$

$$e^{4t}(-2-3\times 1)=-5e$$

$$e^{4t}=e$$

$4t=1$에서 $t=\frac{1}{4}$

이때

$$\frac{dx}{dt}=e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t),$$

$$\frac{dy}{dt}=e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t)}{e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t)}$$

$$=\frac{4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t}{4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t}$$

위 식에 $t=\frac{1}{4}$을 대입하면

$$\frac{4-12\times\frac{1}{2}+6\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{4+4\times\frac{1}{2}+2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{4-6+3\pi}{4+2+\pi}=\frac{3\pi-2}{\pi+6}$$

따라서 곡선 C가 직선 $y=3x-5e$와 만나는 점 P에서의 접선의 기울기는

$\frac{3\pi-2}{\pi+6}$

정답 ②

28. **출제의도** : 부분적분과 치환적분을 이용하여 새롭게 정의된 함수의 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$에서

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{x+1}$$

점 $(s,\ f(s))(s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\mathrm{H}(0,\ f(s))$

또한 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(s, f(s))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(s)=\frac{s^2}{s+1}(x-s)$$

이고 이 접선이 y축과 만나는 점을 I라 하면

$$\mathrm{I}\left(0,\ -\frac{s^3}{s+1}+f(s)\right)$$

이때 $s>0$에서 $f'(s)=\frac{s^2}{s+1}>0$이므로

두 점 H, I 사이의 거리는

$$f(s)-\left(-\frac{s^3}{s+1}+f(s)\right)=\frac{s^3}{s+1}$$

즉 $t=\frac{s^3}{s+1}$이다.

이때

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}g(t)dt=\Big[\ tg(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}tg'(t)dt$$

이고

$t=\frac{1}{2}$일 때

$$\frac{s^3}{s+1}=\frac{1}{2},\ 2s^3-s-1=0$$

$(s-1)(2s^2+2s+1)=0$

에서 $s>0$이므로 $s=1$

$t=\frac{27}{4}$일 때

$$\frac{s^3}{s+1}=\frac{27}{4},\ 4s^3-27s-27=0$$

$(s-3)(2s+3)^2=0$

에서 $s>0$ 이므로 $s=3$

즉

$$\Big[\ tg(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}}=\frac{27}{4}g\left(\frac{27}{4}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{27}{4}\times3-\frac{1}{2}\times1$$

$$=\frac{79}{4}$$

또한 $s=g(t)$이므로 $g'(t)=\frac{ds}{dt}$

따라서

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} tg'(t)dt$

$= \int_1^3 \frac{s^3}{s+1}ds$

$= \int_1^3 \left(s^2 - s + 1 - \frac{1}{s+1}\right)ds$

$= \left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s - \ln|s+1|\right]_1^3$

$= \left(9 - \frac{9}{2} + 3 - \ln 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right)$

$= \left(\frac{15}{2} - 2\ln 2\right) - \left(\frac{5}{6} - \ln 2\right)$

$= \frac{20}{3} - \ln 2$

이므로

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)dt$

$= \frac{79}{4} - \left(\frac{20}{3} - \ln 2\right)$

$= \frac{157}{12} + \ln 1$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등차수열과 등비수열을 구하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항도 d이므로

$a_n = d + (n-1)d = nd \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

이때 어떤 자연수 k에 대하여

$b_{k+1} = \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{d} - 1$

$b_{k+2} = \frac{1}{a_2} - 1 = \frac{1}{2d} - 1$

$b_{k+3} = \frac{1}{a_3} - 1 = \frac{1}{3d} - 1$

이고 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이므로

$\left(\frac{1}{2d} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{d} - 1\right)\left(\frac{1}{3d} - 1\right)$

$\frac{1}{4d^2} - \frac{1}{d} + 1 = \frac{1}{3d^2} - \frac{1}{d} - \frac{1}{3d} + 1$

$\frac{1}{12d^2} = \frac{1}{3d}$

$d = \frac{1}{4}$

이때 $b_{k+1} = 3$, $b_{k+2} = 1$, $b_{k+3} = \frac{1}{3}$이므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이고 첫째항 b_1은 3의 거듭제곱 꼴이다.

한편 $0 < \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right) < 30$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}b_1$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n(n+1)}$

$= \lim_{n\to\infty} 16 \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} 16\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 16$

이므로

$0 < \frac{3}{2}b_1 - 16 < 30$

$\frac{32}{3} < b_1 < \frac{92}{3}$

이때 b_1은 3의 거듭제곱 꼴이어야 하므로

$b_1=27$

즉, $a_n=\frac{n}{4}$이고, 수열 $\{b_{2n}\}$은

첫째항이 $b_2=b_1\times\frac{1}{3}=27\times\frac{1}{3}=9$,

공비가 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{2}{4}\times\frac{9}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{81}{8}=\frac{81}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=81$이므로

$p+q=97$

정답 97

30. **출제의도** : 역함수의 성질과 역함수의 미분법을 활용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 증가하는 연속함수이므로 역함수 $f^{-1}(x)$도 실수 전체에서 증가하는 연속함수이다.

따라서 조건 (가)에서 $|x|\le 1$일 때

$f^{-1}(x)=-\frac{x}{2}(x^2-5)$

이고, 조건 (나)에서 $x>1$일 때

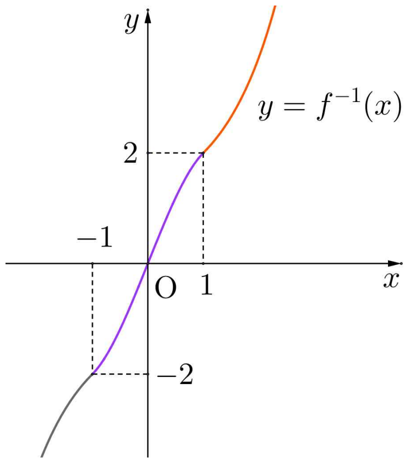
$f^{-1}(x)=e^{x-1}+1$

이며 $x<-1$일 때

$f^{-1}(x)=-(e^{-x-1}+1)$

이다.

역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) 점 (0, 1)을 지나고 곡선

$y=-\frac{x}{2}(x^2-5)$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x$

에 접하는 직선 l의 기울기를 구해 보자.

$y'=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$$\frac{-\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{5}{2}\alpha-1}{\alpha-0}=-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{5}{2}$$

$-\alpha^3+5\alpha-2=-3\alpha^3+5\alpha$

$\alpha=1$

따라서 접선 l의 기울기는 1이다.

한편, $y=e^{x-1}+1$에서 $y'=e^{x-1}$이므로 이 곡선 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기도 1이다.

(ii) 점 (0, 1)을 지나고 곡선

$y=-(e^{-x-1}+1)$, 즉 $y=-e^{-x-1}-1$

에 접하는 직선 m의 기울기를 구해 보자.

$y'=e^{-x-1}$이므로 접점의 x좌표를 β라 하면

$$\frac{-e^{-\beta-1}-1-1}{\beta-0}=e^{-\beta-1}$$

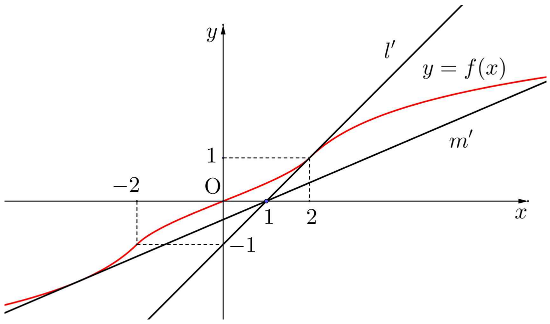
$$-e^{-\beta-1}-2=\beta e^{-\beta-1}$$

$$(\beta+1)e^{-(\beta+1)}=-2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, 두 직선 l, m을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 각각 l', m'이라 하면 두 직선 l', m'의 기울기는 각각 $\frac{1}{1}=1$, $\frac{1}{e^{-\beta-1}}=e^{\beta+1}$

이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(1, 0)$에서 이 곡선에 그은 접선은 다음 그림과 같다.



따라서

$$g(m)=\begin{cases} 1 & (m\le 0) \\ 3 & (0<m<e^{\beta+1}) \\ 2 & (m=e^{\beta+1}) \\ 1 & (m>e^{\beta+1}) \end{cases}$$

이므로 함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b$ $(a<b)$에서 불연속인 a, b는

$a=0$, $b=e^{\beta+1}$

이다.

$b=e^{\beta+1}$에서 $\ln b=\beta+1$이고

㉠에서

$$(\beta+1)e^{-(\beta+1)}=\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}}=-2$$

이므로

$$\frac{\ln b}{b}=\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}}=-2$$

따라서

$$g(a)\times\left(\lim_{m\to a+}g(m)\right)+g(b)\times\left(\frac{\ln b}{b}\right)^2$$

$$=1\times3+2\times(-2)^2=11$$

정답 11

■ [선택: 기하]
23. ③ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ④
28. ④ 29. 360 30. 221

23. 출제의도 : 두 벡터의 합의 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ -1)$이므로
$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 1)+(-1,\ -1)$
$=(3,\ 0)$
따라서 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은
$3+0=3$

정답 ③

24. 출제의도 : 도형의 평행이동을 이해하고 포물선의 식을 통해 포물선의 초점과 준선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
포물선 $y^2=12(x-2)$는 포물선 $y^2=12x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=12(x-2)$의 초점과 준선 사이의 거리는 포물선 $y^2=12x$의 초점과 준선 사이의 거리와 같다.
포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의
초점의 좌표는 $(3,\ 0)$
준선의 방정식은 $x=-3$이다.
따라서 포물선 $y^2=12(x-2)$의 초점과 준선 사이의 거리는
$3-(-3)=6$

정답 ①

25. 출제의도 : 좌표공간에서 평면 또는 점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 $\mathrm{A}\left(3,\ -\dfrac{3}{2},\ -2\right)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
$\mathrm{B}\left(-3,\ -\dfrac{3}{2},\ -2\right)$
이고, 점 $\mathrm{A}\left(3,\ -\dfrac{3}{2},\ -2\right)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는
$\mathrm{C}\left(-3,\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$
따라서 선분 BC의 길이는
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1\ (a>0)$ 위의 점 $(a,\ \sqrt{2}a)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{ax}{a^2}-\dfrac{\sqrt{2}ay}{a^2}=-1$
$x-\sqrt{2}y+a=0$
위의 직선의 방정식에 $x=0$을 대입하면
$-\sqrt{2}y+a=0$
$y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$이다.

한편, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+a^2=2a^2$

$c=\sqrt{2}a$

이므로 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=8$에서

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

$=\left|\sqrt{2}a-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right|\times\left|-\sqrt{2}a-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right|$

$=2a^2-\dfrac{a^2}{2}$

$=\dfrac{3a^2}{2}=8$

$a^2=\dfrac{16}{3}$

따라서

$a=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 원기둥의 높이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

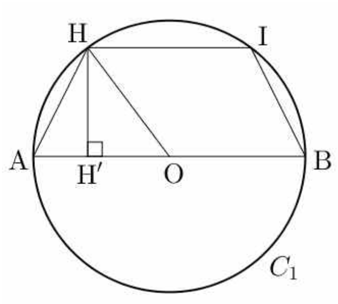
점 D에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발이 H이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{DH}}^2}$

점 C에서 원 C_1을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BI}}^2+\overline{\mathrm{CI}}^2}$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$이고 두 선분 DH, CI는 원기둥의 높이로 서로 같으므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BI}}$이다. 따라서 두 선분 AB, HI는 서로 평행하다.



선분 AB가 원 C_1의 지름이므로 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 원 C_1의 중심이고, 점 H에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{CD}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{OH'}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{HI}}=\dfrac{3}{2}$

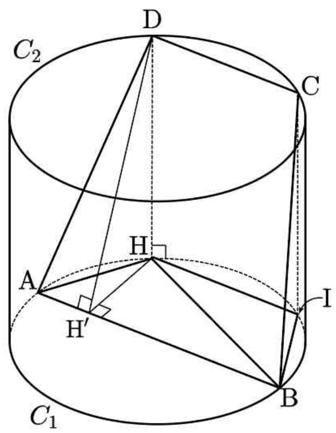
직각삼각형 OHH′에서

$\overline{\mathrm{HH'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2-\overline{\mathrm{OH'}}^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=2$

그러므로 삼각형 ABH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{HH'}}=\dfrac{1}{2}\times5\times2=5$



한편, 선분 DH가 원 C_1을 포함하는 평면과 수직이고, $\overline{\mathrm{HH'}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DH'}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$

두 선분 AB, HI는 서로 평행하므로 두 선분 AB, DC는 서로 평행하고 사각형 ABCD는 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 등변사다리꼴이다.

그러므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{DC}}) \times \overline{\mathrm{DH'}} = \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{\mathrm{DH'}}$$

$$= 4\overline{\mathrm{DH'}}$$

사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 ABH의 넓이의 4배이므로

$4\overline{\mathrm{DH'}} = 4 \times 5$에서 $\overline{\mathrm{DH'}} = 5$

직각삼각형 DHH'에서

$$\overline{\mathrm{DH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{DH'}}^2 - \overline{\mathrm{HH'}}^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

따라서 원기둥의 높이는 $\sqrt{21}$이다.

정답 ④

28. 출제의도 : 두 평면의 수직 조건과 평면에 접하는 구의 성질을 이용하여 도형의 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{BH}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$이고,

$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{DH}}$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{CH}} = 2$이므로

$$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AH}} = 4$이므로

삼각형 ABH는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AH}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BH}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$이므로 평면 ABH와 직선 CD는 서로 수직이고, 평면 ACD는 직선 CD를 포함하므로 두 평면 ABH와 ACD는 서로 수직이다.

즉, 삼각형 ABH의 무게중심 G에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 선분 AH 위에 있고, 구 S와 평면 ABH가 만나서 생기는 원은 정삼각형 ABH의 내접원이므로

$$\overline{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{\mathrm{GI}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AG}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{\mathrm{AI}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}} = 2$$

이때 $\angle \mathrm{AIG} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\angle \mathrm{APG} = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형 T는 점 I를 지나고 직선 AG에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원과 같다. 이 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

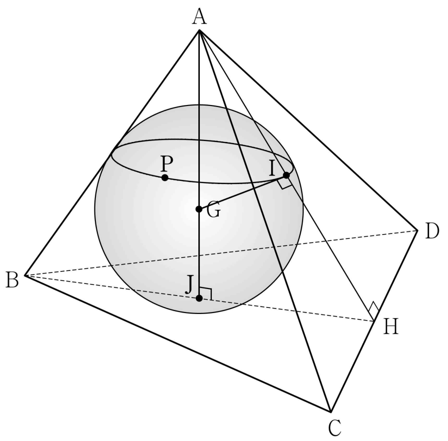
$\overline{\mathrm{AI}} \times \overline{\mathrm{GI}} = \overline{\mathrm{AG}} \times \mathrm{r}$

$$2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} r$$

$r = 1$

이므로 도형 T의 넓이는

$1^2 \times \pi = \pi$



정삼각형 ABH의 내접원이 선분 BH와 만나는 점을 J라 하면 세 점 A, G, J는 한 직선 위에 있고, 두 평면 ABH와 BCD가 서로 수직이므로 평면 BCD와 직선 AJ는 서로 수직이다.

즉, 도형 T가 포함된 평면과 평면 BCD가 서로 평행하므로 도형 T가 포함된 평면과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기는 두 평면 BCD와 ABC가 이루는 예각의 크기와 같다. 이 각의 크기를 θ라 하자.

$\overline{\mathrm{AH}}=4$, $\overline{\mathrm{CH}}=2$이고 $\angle\mathrm{AHC}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 k라 하면

$$k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times4$$
$$=8$$

삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 JBC와 같다. 삼각형 JBC의 넓이를 k'이라 하면

$$k'=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BJ}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$$

따라서 두 평면 BCD와 ABC가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{k'}{k}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

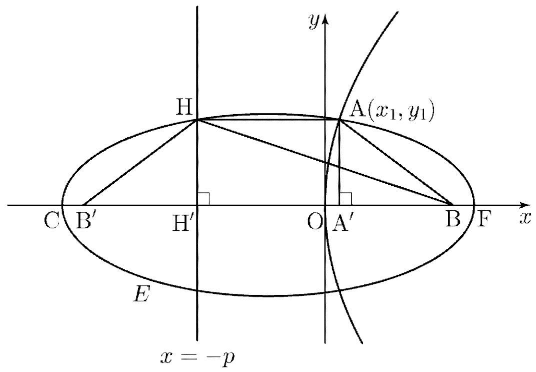
이므로 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\pi\cos\theta=\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 포물선과 타원의 정의 및 타원의 대칭성을 이용하여 포물선의 초점 및 포물선 위의 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



세 점 F, A, H를 지나는 타원을 E라 하고, 타원 E의 점 B가 아닌 초점을 B′, 타원 E가 x축과 만나는 점 중 F가 아닌 점을 C라 하자.

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=p+x_1$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A$'$, 직선 $x=-p$가 x축과 만나는 점을 H$'$이라 하면 타원 E는 선분 A$'$H$'$의 중점을 지나고 x축에 수직인 직선에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{A'F}}=\overline{\mathrm{CH'}}=p-x_1$

타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{B'H}}&=\overline{\mathrm{CF}}\\&=2\times\overline{\mathrm{A'F}}+\overline{\mathrm{A'H'}}\\&=2(p-x_1)+(p+x_1)\\&=3p-x_1\end{aligned}$$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{HB'}}$이므로 삼각형 AHB의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{AH}}&=(\overline{\mathrm{B'H}}+\overline{\mathrm{BH}})+\overline{\mathrm{AH}}\\&=\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{AH}}\\&=(3p-x_1)+(p+x_1)\\&=4p\end{aligned}$$

삼각형 AHB의 둘레의 길이가 $p+27$이므로

$4p=p+27$에서 $p=9$

즉, 포물선의 방정식은 $y^2=36x$이므로

$y_1{}^2=36x_1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 삼각형 AHB의 넓이가

$2p+12=30$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{AA'}}=30$

에서

$\frac{1}{2}\times(9+x_1)\times y_1=30$

즉, $y_1(9+x_1)=60$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 제곱하면

$y_1{}^2(x_1+9)^2=3600$

㉠을 위 등식에 대입하면

$36x_1(x_1+9)^2=3600$

$x_1{}^3+18x_1{}^2+81x_1-100=0$

$(x_1-1)(x_1{}^2+19x_1+100)=0$

$x_1{}^2+19x_1+100>0$이므로 $x_1=1$

㉡에서 $y_1=6$

직각삼각형 FHH$'$에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FH'}}&=\overline{\mathrm{FA'}}+\overline{\mathrm{A'H'}}\\&=(p-x_1)+(p+x_1)\\&=2p=18\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AA'}}=y_1=6$

이므로

$\overline{\mathrm{FH}}^2=\overline{\mathrm{FH'}}^2+\overline{\mathrm{HH'}}^2 \quad =18^2+6^2=360$

따라서 $k^2=360$

정답 360

30. **출제의도** : 벡터의 내적과 벡터 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 두 벡터의 내적의 절댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 선분 AB를 지름으로 하는 원을 C라 하자. 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 원 C의 중심이고, 두 점 P, Q가 원 C 위의 점이고 $\overline{\mathrm{AB}}=10\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|&=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\\&=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{PB}|=14$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2}{2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|}$$

$$=\frac{(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-14^2}{2\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{24}{25}$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$=5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$=-48$$

한편

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}=-2\overrightarrow{OP}$$

이고

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$$

$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{OP}$$

이므로

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})$$

$$=-2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{OP})$$

$$=-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4|\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=-2\times(-48)-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+4\times(5\sqrt{2})^2$$

$$=296-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

이고

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

$$=(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

$$=100-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$$

이므로

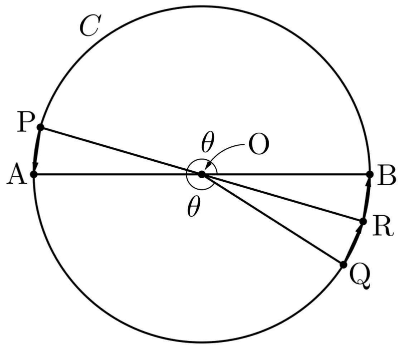
$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PB})=2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

에서

$$296-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\times(100-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-48$$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기 θ와 같다. 이때 $|\overrightarrow{QB}|>0$이므로 점 Q는 점 B와 일치하지 않고, 따라서 네 점 A, B, P, Q는 그림과 같다.



$\overline{PB}=14$, $\overline{AB}=10\sqrt{2}$이고 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\overline{PA}=\sqrt{14^2-(10\sqrt{2})^2}=2$$

직선 OP가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R이라 하자.

두 직선 PA, QR이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\alpha=\pi-\angle APR-\angle QRP=\pi-2\angle APR$$

$$=\angle POA=\pi-\theta$$

이고

$$|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RB}|=|\overrightarrow{PA}|=2$$

이므로

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QR}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{QR}|\cos(\pi-\alpha)$$

$$=2\times2\times\cos\theta$$

$$=2\times2\times\left(-\frac{24}{25}\right)=-\frac{96}{25}$$

한편

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RB}} = -|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{RB}}| = -4$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{QR}} + \overrightarrow{\mathrm{RB}}) = \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RB}}$

$= -\frac{96}{25} + (-4) = -\frac{196}{25}$

이고

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}}| = \left| -\frac{196}{25} \right| = \frac{196}{25}$

따라서 $p=25$, $q=196$이므로

$p+q=25+196=221$

정답 221