2025학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ④	03. ⑤	04. ②	05. ④
06. ⑤	07. ③	08. ①	09. ④	10. ③
11. ②	12. ①	13. ⑤	14. ④	15. ②
16. 7	17. 33	18. 96	19. 41	
20. 36	21. 16	22. 64		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}$

$=5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}$

$=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=5^1=5$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=3x^2-8$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=f'(2)$

$=3\times 2^2-8$

$=4$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 양수 k의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 양수 k이므로

$a_n=k^n$

$\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=30$에서

$\frac{k^4}{k^2}+\frac{k^2}{k}=30$

$k^2+k=30$

$k^2+k-30=0$

$(k+6)(k-5)=0$

$k>0$이므로

$k=5$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$에서

$\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2-}(5x+a)=-10+a$

$\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}(x^2-a)=4-a$

$f(-2)=4-a$

이므로

$-10+a=4-a$, $a=7$

따라서 상수 a의 값은 7이다.

정답 ②

5. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$ 에서

$f'(x)=2x\times(3x^2-x)+(x^2+1)\times(6x-1)$

따라서

$f'(1)=2\times2+2\times5=14$

정답 ④

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$ 에서

$\sin\theta=\frac{1}{5}$

따라서

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=9x^2+2$

따라서

$f(1)=9\times1^2+2=11$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 값을 간단히 나타낼 수 있는가?

풀이 :

$a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\log10+\log_2 2+\log_2 10$

$=-1+1+\log_2 10=\log_2 10$

$a\times b=\log_2 10\times\log 2=1$

정답 ①

9. 출제의도 : 정적분의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$ …… ㉠

㉠의 좌변은 정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

그러므로 ㉠에서

$\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$

즉, $\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

이때

$$\begin{aligned}\int_{0}^{a} f(x)dx &= \int_{0}^{a} (3x^2 - 16x - 20)dx \\ &= \left[x^3 - 8x^2 - 20x\right]_0^a \\ &= a^3 - 8a^2 - 20a\end{aligned}$$

이므로

$a^3 - 8a^2 - 20a = 0$에서

$a(a^2 - 8a - 20) = 0$

$a(a+2)(a-10) = 0$

따라서 양수 a의 값은 10이다.

정답 ④

10. 출제의도 : 코사인함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x) = a\cos bx + 3$의 그래프는 함수 $y = a\cos bx$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

a가 자연수이므로

$f(0) \geq f(x)$

이다.

한편, 함수 $y = a\cos bx + 3$의 주기는

$\frac{2\pi}{b}$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 가지므로

$a + 3 = 13$ …… ㉠

$\frac{2\pi}{b} \leq \frac{\pi}{3}$ …… ㉡

이어야 한다.

㉠에서

$a = 10$

㉡에서

$b \geq 6$

따라서 $a + b$의 최솟값은 $b = 6$일 때

$10 + 6 = 16$

정답 ③

11. **출제의도** : 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=x'=3t^2-3t-6$

$a=v'=6t-3$

이때 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은

$v=3t^2-3t-6=3(t-2)(t+1)=0$

에서

$t=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 구하는 가속도는

$6\times2-3=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 시그마의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$$

$a_1=2$이므로 $b_2=4$

등차수열 $\{b_n\}$에서 $b_1=2$, $b_2=4$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.

즉, $b_n=2n$

한편, ㉠의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}(n-1)^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{a_n}{b_{n+1}}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2=n-\frac{1}{2}$$

$b_{n+1}=2(n+1)$이므로

$$a_n=2(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2n^2+n-1\,(n\geq2)$$

이 때, $a_1=2$이므로

$a_n=2n^2+n-1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k-1)$$
$$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}-1\times5$$
$$=120$$

정답 ①

13. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때,

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$

이고, $f'(0)=-7$이므로

$2k+k+2=-7$

즉, $k=-3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

이고, $f(3)=12$이므로 점 P의 좌표는

P$(3, 12)$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=4x$이므로

$$B-A=\int_0^3\{4x-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\{4x-(x^3-7x+6)\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^3+11x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3$$

$$=-\frac{1}{4}\times81+\frac{11}{2}\times9-6\times3$$

$$=\frac{45}{4}$$

정답 ⑤

[참고]

점 Q의 x좌표를 a라 하면

$B-A$

$$=\int_a^3\{4x-f(x)\}dx-\int_0^a\{f(x)-4x\}dx$$

$$=\int_a^3\{4x-f(x)\}dx+\int_0^a\{4x-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\{4x-f(x)\}dx$$

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

원 O의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=r$

이고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{2}{3}r$

또한 $\overline{\mathrm{CE}}=x$라 하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이가 각각

$$\frac{1}{2}\times r\times r\times sinA=\frac{1}{2}r^2\sin A$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}r\times(r+x)\times sinA=\frac{5}{6}r(r+x)\sin A$$

이고 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이므로

$$\frac{1}{2}r^2\sin A:\frac{5}{6}r(r+x)\sin A=9:35$$

$$3r+3x=7r,\ x=\frac{4}{3}r$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$$

이고

$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{3}r,\ \sin A:\sin C=8:5$$

이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{\sin A}{\sin C}$$

$$=\frac{5}{3}r\times\frac{8}{5}$$

$=\frac{8}{3}r$

$\angle ACB=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{8}{3}r\right)^2+\left(\frac{7}{3}r\right)^2-\left(\frac{5}{3}r\right)^2}{2\times\frac{8}{3}r\times\frac{7}{3}r}$$

$$=\frac{11}{14}$$

이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}$$

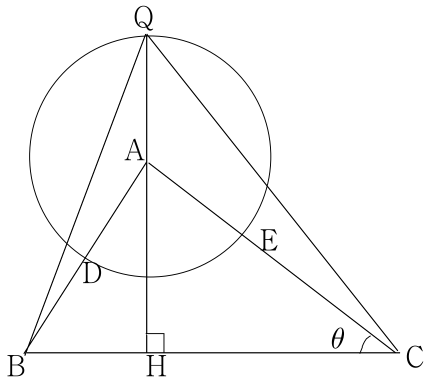
$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2\times7$, 즉 $\frac{\frac{5}{3}r}{\sin\theta}=14$ 에서

$$\frac{5}{3}r=14\sin\theta=14\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=5\sqrt{3}$$

$r=3\sqrt{3}$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{AC}\sin\theta$

$$=\frac{7}{3}r\sin\theta$$

$$=\frac{7}{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$=\frac{15}{2}$$

따라서 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 삼각형 ABC의 외부의 점을 Q라 하면, 삼각형 PBC의 넓이가 최대일 때는 점 P가 점 Q의 위치에 있을 때이다.

이때

$\overline{QH}=r+\overline{AH}$

$$=3\sqrt{3}+\frac{15}{2}$$

이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times3\sqrt{3}\times\left(3\sqrt{3}+\frac{15}{2}\right)$$

$$=36+30\sqrt{3}$$

정답 ④

15. **출제의도** : 함수의 미분가능과 함수의 극대, 극소 및 그래프를 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0)=7$

$x<0$일 때,

$g'(x)=3x^2+2ax+15$

이므로

$$\lim_{x\to0-}g'(x)=15$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 7$

$\lim_{x \to 0+} f'(x) = 15$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(p<0)$라 하면

$f(x) = px^2 + 15x + 7$

$f'(x) = 2px + 15$

$f'(x) = 0$에서

$2px + 15 = 0$

$x = -\frac{15}{2p}$

이때, $p<0$이므로

$-\frac{15}{2p} > 0$

조건 (나)에서

x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

함수 $g(x)$는 $x<0$에서 극댓값과 극솟값을 가져야 한다.

즉, $x<0$에서

방정식 $g'(x)=0$은 서로 다른 두 실근 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta<0)$

를 갖고,

$\beta = \alpha + 4,\ -\frac{15}{2p} = \beta + 4$ …… ㉠

이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax + 15 = 0$의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \alpha+4$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + (\alpha+4) = -\frac{2a}{3}$ …… ㉡

$\alpha(\alpha+4) = 5$ …… ㉢

㉢에서

$\alpha^2 + 4\alpha - 5 = 0$

$(\alpha+5)(\alpha-1) = 0$

$\alpha < 0$이므로

$\alpha = -5$

$\alpha = -5$를 ㉡에 대입하면

$-5 + (-5+4) = -\frac{2a}{3}$

$a = 9$

$\alpha = -5$를 ㉠에 대입하면

$\beta = -5 + 4 = -1$

$-\frac{15}{2p} = -1 + 4$

$p = -\frac{5}{2}$

따라서

$g(-2) = (-2)^3 + 9 \times (-2)^2 + 15 \times (-2) + 7$

$= 5$

$g(2) = -\frac{5}{2} \times 2^2 + 15 \times 2 + 7 = 27$

이므로

$g(-2) + g(2) = 5 + 27 = 32$

정답 ②

16. **출제의도** : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 :

로그의 진수의 조건에 의해

$x - 3 > 0,\ 3x - 5 > 0$

즉, $x > 3$ …… ㉠

$\log_2(x-3) = \log_4(3x-5)$ …… ㉡

이때

$\log_2(x-3)=\log_{2^2}(x-3)^2=\log_4(x-3)^2$

이므로 ㉡에서

$\log_4(x-3)^2=\log_4(3x-5)$

즉, $(x-3)^2=3x-5$에서

$x^2-6x+9=3x-5$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

따라서 ㉠에 의해 $x=7$

정답 7

17\. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (9x^2+4x)dx$

$=3x^3+2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=6$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$이므로

$f(2)=24+8+1=33$

정답 33

18\. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$a_n+a_{n+4}=12$이므로

$\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{4}(a_n+a_{n+4})$

$=\sum_{n=1}^{4}12=12\times4=48$

$\sum_{n=9}^{16}a_n=\sum_{n=9}^{12}(a_n+a_{n+4})$

$=\sum_{n=9}^{12}12=12\times4=48$

따라서

$\sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{4}(a_n+a_{n+4})+\sum_{n=9}^{12}(a_n+a_{n+4})$

$=48+48=96$

정답 96

19\. **출제의도** : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$에서

$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2$

$=6(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값을 갖고, $x=2a$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$이고

$f(-a)=-2a^3-3a^3+12a^3=7a^3$

이므로

$7a^3=\frac{7}{27}$에서

$a^3=\frac{1}{27}$

$a>0$이므로

$a=\frac{1}{3}$

따라서

$f(x)=2x^3-x^2-\frac{4}{3}x$

이므로

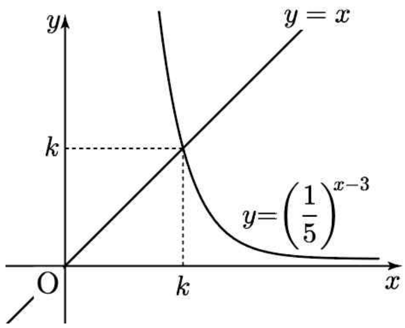
$f(3)=54-9-4=41$

정답 41

20. 출제의도 : 지수의 성질과 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$는 다음 그림과 같다.



$x>k$인 모든 실수 x에 대하여

$f(f(x))=3x$ …… ㉠

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표가 k이므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=k$에서

$k\times5^k=5^3$

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)=f\left(\left(\frac{1}{k\times5^k}\right)^3\right)$$

$$=f\left(\left(\frac{1}{5^3}\right)^3\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{5^9}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

한편,

$x>k$에서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로

k보다 작은 임의의 두 양수

y_1, y_2 $(y_1<y_2)$에 대하여

$f(x_1)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x_1-3}=y_1$

$f(x_2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2-3}=y_2$

인 x_1, x_2 $(k<x_2<x_1)$이 존재한다.

㉠에서

$f(f(x_1))=3x_1$, $f(f(x_2))=3x_2$

이므로

$f(f(x_1))>f(f(x_2))$

즉, $f(y_1)>f(y_2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x<k$에서 감소한다.

$x>k$에서 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

그러므로 ㉡에서

$f(\alpha)=\frac{1}{5^9}$

인 실수 α ($\alpha > k$)가 존재한다.

이때

$$f(\alpha)=\left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3}=\frac{1}{5^9}$$

에서

$\alpha-3=9$, 즉 $\alpha=12$

따라서 ㉠에 의해 구하는 값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right) &= f(f(\alpha)) \\ &= 3\alpha \\ &= 3\times 12 \\ &= 36 \end{aligned}$$

정답 36

21. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta)=0$인 실수 β가 존재한다.

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로 $f(\beta)=0$인 β에 대하여

$\lim_{x\to\beta}f(x)=0$이고, $\lim_{x\to\beta}f(2x+1)=0$

함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(2\beta+1)=0$

즉 $2\beta+1$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

마찬가지 방법으로 $2\beta+1$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $2(2\beta+1)+1=4\beta+3$도 방정식 $f(x)=0$ 근이고 $2(4\beta+3)+1=8\beta+7$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

만약 $\beta\neq 2\beta+1$, 즉 $\beta\neq -1$이면

β, $2\beta+1$, $4\beta+3$, $8\beta+7$가 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 근이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$는 $x=-1$만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0$에서

$f(-1)=-1+a-b+4=0$

$b=a+3$

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3+ax^2+(a+3)x+4 \\ &=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\} \end{aligned}$$

$f(x)\neq(x+1)^3$이므로

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 실근은 존재하지 않는다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a-1)^2-16<0$

$a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$

$-3<a<5$

$f(1)=a+b+5=a+(a+3)+5=2a+8$에서 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때,

$2\times 4+8=16$

정답 16

22. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 첫째항의 절댓값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서 $|a_m|=|a_{m+2}|$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 3이므로 다음

의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $|a_3|$이 홀수인 경우

$a_4=a_3-3$이고 짝수이다.

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}(a_3-3)$

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\frac{1}{2}(a_3-3)\right|$

$a_3=1$ 또는 $a_3=-3$

$a_3=1$이면 $a_4=-2$이고 1은 홀수이므로 a_2는 짝수이고 $a_2=2$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_3=-3$이면 $a_4=-6$이고 $a_2=-6$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $|a_3|$이 0 또는 짝수인 경우

a_3	a_4	a_5
a_3	$\frac{1}{2}a_3$	$\frac{1}{2}a_3-3$
		$\frac{1}{4}a_3$

$|a_3|=\left|\frac{1}{4}a_3\right|$에서 $a_3=0$

$a_3=0$이면 3 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m=0$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
0	3	6
	0	

$a_2=0$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 6이다.

한편, $|a_3|=\left|\frac{1}{2}a_3-3\right|$에서

$a_3=2$ 또는 $a_3=-6$

$a_3=2$이면 $a_4=1$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
2	5	10
	4	7
		8

이때 조건을 만족시키는 a_1의 값은 10, 7, 8이다.

$a_3=-6$이면 $a_4=-3$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
-6	-3	
	-12	-9
		-24

$a_2=-3$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 -9, -24이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합은

$6+(10+7+8)+(9+24)=64$

정답 64

■ [선택: 미적분]

23. ③	24. ④	25. ②	26. ①	27. ①
28. ②	29. 25	30. 17		

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=3\times\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

$=3$

정답 ③

24. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^{10}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[x+\ln|x+1|\Big]_0^{10}=10+\ln 11$$

정답 ④

25. **출제의도** : 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_n=\dfrac{na_n}{n^2+3}$이라 하면

$a_n=\dfrac{b_n(n^2+3)}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(n^2+3)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2}=1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\ 2}+n}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\ 2}+n-a_n^{\ 2}}{\sqrt{a_n^{\ 2}+n}+a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+0}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선 $x=t(1\le t\le e)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\sqrt{\frac{t+1}{t(t+\ln t)}}\right)^2=\frac{t+1}{t(t+\ln t)}$$

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(t)\,dt = \int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)}\,dt$$

이때 $t+\ln t = s$라 하면

$$\frac{ds}{dt} = 1 + \frac{1}{t} = \frac{t+1}{t}$$

이고 $t=1$일 때 $s=1$, $t=e$일 때 $s=e+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)\,dt &= \int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)}\,dt \\ &= \int_1^{e+1} \frac{1}{s}\,ds \\ &= \Big[\ln s\Big]_1^{e+1} \\ &= \ln(e+1)\end{aligned}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이므로 $g(0)=0$, $g'(0)=0$이다.

$g(0)=f(e^0)+e^0=f(1)+1=0$

$f(1)=-1$ …… ㉠

$g'(x)=f'(e^x)\times e^x+e^x$이므로

$g'(0)=f'(e^0)\times e^0+e^0=f'(1)+1=0$

$f'(1)=-1$ …… ㉡

한편, 함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$ 또는 $g'(x)\leq 0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(e^x)\times e^x+e^x \\ &=e^x\{f'(e^x)+1\}\end{aligned}$$

에서 모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(e^x)+1\geq 0$, 즉

$f'(e^x)\geq -1$

이어야 한다.

㉡에서 $f'(1)=-1$이고 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3(x-1)^2-1$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\{3(x-1)^2-1\}\,dx \\ &=(x-1)^3-x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이고 ㉠에서 $f(1)=-1$이므로

$f(1)=-1+C=-1$, $C=0$

$f(x)=(x-1)^3-x$

$$\begin{aligned}g(x)&=f(e^x)+e^x \\ &=(e^x-1)^3-e^x+e^x \\ &=(e^x-1)^3\end{aligned}$$

한편, 함수 $h(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $h(8)=k$라 하면 $g(k)=8$에서

$(e^k-1)^3=8$, $e^k-1=2$, $e^k=3$, $k=\ln 3$

따라서

$$h'(8)=\frac{1}{g'(h(8))}=\frac{1}{g'(\ln 3)}$$

$$=\frac{1}{e^{\ln 3}\{f'(e^{\ln 3})+1\}}$$

$$=\frac{1}{3\times[\{3\times(3-1)^2-1\}+1]}=\frac{1}{36}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 부정적분과 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x>0$에서

$f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}<0$이므로

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록이다. 따라서 양수 t에 대하여 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)(x>0)$의 교점은 점 $(t,\ f(t))$ 하나이고, 접선은 곡선의 위쪽에 위치한다.

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대하여

$$g(t)=\int_0^t\{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$$

이때 $f'(x)=-x+e^{1-x^2}$에서 양변에 x를 곱하면 $xf'(x)=-x^2+xe^{1-x^2}$

$$\int xf'(x)\,dx=\int\left(-x^2+xe^{1-x^2}\right)dx$$

$$xf(x)-\int f(x)\,dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$\int f(x)\,dx=xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$g(t)=\left[\frac{f'(t)}{2}x^2-tf'(t)x+f(t)x\right]_0^t-\int_0^t f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}t^2f'(t)-t^2f'(t)+tf(t)-\left[xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+tf(t)-\left(tf(t)+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e\right)$$

$$=-\frac{1}{2}t^2\left(-t+e^{1-t^2}\right)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$$

$$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}(t^2+1)e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$$

$$g'(t)=\frac{1}{2}t^2+t^3e^{1-t^2}$$

따라서

$$g(1)+g'(1)=\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비급수를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$a>0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|-a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a<0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|+a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a>0,\ r<0$이거나 $a<0,\ r<0$이다.

(ⅰ) $a>0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-2a_{2n}\right)=\frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times(-r)=\frac{20}{3},\quad \frac{40}{3}\times(-r)=\frac{20}{3}$$

$r=-\frac{1}{2},\ a=5$

(ⅱ) $a<0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n-1})$$

$$=\frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times r=\frac{40}{3},\ -\frac{20}{3}r=\frac{40}{3}$$

$r=-2$

이때, $r<-1$이므로 $r^2>1$이 되어

$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$와 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$ 모두 수렴

하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=5,\ r=-\frac{1}{2}$

이므로

$$a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\right\}$$

$$>\frac{1}{700}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$ 에서

$k=4l-3$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

$k=4l-2$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l-1$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

(단, l은 자연수)이므로

$2n=4p-2$(p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$2n=4p$(p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$n\to\infty$이면 $p\to\infty$이고

$2n=4p-2,\ 2n=4p$의 두 경우 모두 각

급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\right\}$$

$$=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 m

의 값은 1, 3, 5, 7, 9이고, 그 합은

$1+3+5+7+9=25$

정답 25

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극대를 갖는 x의 값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$이고 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(0)=\sin b=0$, $b=k\pi$ (단, k는 정수) …… ㉠

$f(2\pi)=2\pi a+b$이므로

$f(2\pi)=\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$ …… ㉡

이때 $\sin x=x$를 만족시키는 실수 x의 값은 0뿐이므로 ㉡에서

$2\pi a+b=0$, $b=-2\pi a$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$-2\pi a=k\pi$, $a=-\frac{k}{2}$ …… ㉣

이고 $f(x)=\sin(ax-2\pi a+\sin x)$이다.

$1\le a\le 2$이고 ㉣에서 $a=-\frac{k}{2}$ (k는 정수)이므로

$a=1$ 또는 $a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$이다.

이때

$f'(x)=\cos(ax-2\pi a+\sin x)\times(a+\cos x)$

에서

$f'(0)=\cos(-2\pi a)\times(a+1)$

$\quad=(a+1)\cos 2\pi a$

$f'(4\pi)=\cos 2\pi a\times(a+1)=(a+1)\cos 2\pi a$

이고

$f'(2\pi)=\cos 0\times(a+1)=a+1$

이므로 $a=1$ 또는 $a=2$이면

$f'(0)=(a+1)\cos 2\pi a=a+1$

즉, $f'(0)=f'(2\pi)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서

$a=\frac{3}{2}$, $b=-2\pi a=-3\pi$

이고

$f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

$f'(x)=\left(\cos x+\frac{3}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

이다. 모든 실수 x에 대하여

$\cos x+\frac{3}{2}\ne 0$이므로 $f'(x)=0$에서

$\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)=0$

$g(x)=\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$는 증가하고

$g(0)=-3\pi$, $g(4\pi)=3\pi$

이다. 이때 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$에 대하여 $g(x)=\frac{2i-7}{2}\pi$를 만족시키는 실수 x의 값을 β_i라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\beta_1$, $x=\beta_3$, $x=\beta_5$에서 극소이고 $x=\beta_2$, $x=\beta_4$, $x=\beta_6$에서 극대이다. 즉, $n=3$이다.

$g(\beta_2)=-\frac{3}{2}\pi$에서

$\frac{3}{2}\beta_2-3\pi+\sin\beta_2=-\frac{3}{2}\pi$

$\sin\beta_2=-\frac{3}{2}(\beta_2-\pi)$

이때 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-\frac{3}{2}(x-\pi)$는 점 $(\pi, 0)$에서만 만나므

로 $\beta_2=\pi$이다. 즉, $\alpha_1=\pi$이다.

따라서

$$n\alpha_1-ab=3\times\pi-\frac{3}{2}\times(-3\pi)$$
$$=\frac{15}{2}\pi$$

$p=2$, $q=15$이므로

$p+q=2+15=17$

정답 17